

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ

Контрольная работа выполняется студентами заочной формы обучения.

Требования к выполнению контрольной работы:

Работа делается в тетради на 18 листов или на 10-15 листах формата А-4.

«Математическая логика», «Комплексные числа», «Матрицы»

Вариант I

1. Запишите формулу для афоризма Конфуция «Благородный человек предъявляет требования к себе, низкий человек предъявляет требования к другим».
2. Составьте таблицу истинности для формулы $F = A \vee B \rightarrow \bar{B} \vee C$
3. Установить равносильность суждений: «Если взялся за дело, то доведи его до конца» и «Не берись за дело или доведи его до конца».

4. Найдите сумму и разность комплексных чисел $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -3 + 4i$.

5. Найдите произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 4+4i$, $z_2 = -2 - i$.

6. Запишите заданное комплексное число в тригонометрической и показательной формах $z = -\sqrt{3} - i$

7. Найдите z^{30} , если $z = -\sqrt{3} + i$.

8. Найти матрицу $C = A - 3B$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

9. Вычислить $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. Найти транспонированную матрицу A^T для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Вычислить $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$.

11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$

Вариант II

1. Запишите формулу для афоризма Лихтенберга «Кто не понимает ничего, кроме химии, тот и ее понимает недостаточно»

2. Составьте таблицу истинности для формулы $F = A \rightarrow \bar{B} \vee (\bar{A} \vee C)$

3. Установить равносильность суждений: «Платон мне друг, но истина дороже» и «Неверно, что Платон мне не друг и что мне не дорога истина».

4. Найдите сумму и разность комплексных чисел $z_1 = 3 - i$, $z_2 = -2 + 5i$.

5. Найдите произведение и частное комплексных чисел $z_1 = 2 + 2i$, $z_2 = -3 - 4i$.

6. Запишите заданное комплексное число в тригонометрической и показательной формах $z = -\sqrt{3} + i$

7. Найдите z^{30} , если $z = -4 + 4i$.

8. Найти $C = 2 \cdot H - A$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -17 \\ -1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -15 \\ -5 & -7 & 0 \end{pmatrix}$.

9. Найти $M \cdot N$ и $N \cdot M$ на матрицу $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} 9 & -6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix}$.

10. Найти транспонированную матрицу A^T для матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычислить $A \cdot A^T$ и $A^T \cdot A$.

11. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

**Контрольная работа № 2 по теме
«Системы линейных алгебраических уравнений», «Векторы», «Аналитическая
геометрия»**

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 2 \end{cases}$$

2. В пространстве заданы точки $A(2; -4; 1)$ и $B(-2; 0; 3)$. Найти модуль вектора \overline{AB} .
3. Какие из векторов $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(4; 8; 12)$, $\vec{c}(5; 10; 12)$ коллинеарны?
4. Найдите координаты вершины D параллелограмма ABCD, если координаты трех других вершин известны: $A(2; 3; 2)$, $B(0; 2; 4)$, $C(4; 1; 0)$.
5. Написать разложение вектора $\vec{x}(3, 1, 3)$ по векторам $\vec{p}(2, 1, 0)$, $\vec{q}(1, 0, 1)$ и $\vec{r}(4, 2, 1)$.
6. Найти угол между векторами $\vec{a}(3; 4; 0)$ и $\vec{b}(4; 4; 2)$.
7. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}(1; 2; 3)$ и $\vec{b}(2; 1; -2)$.
8. Найти объем пирамиды построенной на векторах $\vec{a}(1; 2; 3)$, $\vec{b}(1; -1; 1)$ и $\vec{c}(2; 0; -1)$.
9. Дано уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 7 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $P(0; -1)$. Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.
10. Найти уравнение окружности, проходящей через точки пересечения параболы $y^2 = x + 4$ с осями координат.
11. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.
12. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между фокусами равно 20.
13. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A(2; 2)$ и от оси абсцисс. Построить линию.
14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(-1; 1; 2)$ параллельно плоскости xOy .

Вариант II

1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, Крамера и матричным методом

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$$

2. Найти длину вектора \overline{AB} , если $A(1; 4; 5)$, $B(3; 1; 1)$.
3. При каком значении n вектора $\vec{a}(3; 2; 4)$ и $\vec{b}(9; n; 12)$ коллинеарны?
4. Найдите координаты вершины D параллелограмма ABCD, если координаты трех других вершин известны: $A(1; -1; 0)$, $B(0; 1; -1)$, $C(-1; 0; 1)$.

5. Написать разложение вектора $\vec{x} = (-13, 2, 18)$ по векторам $\vec{p} = (1, 1, 4)$, $\vec{q} = (-3, 0, 2)$, $\vec{r} = (1, 2, -1)$
6. Найти угол между векторами $\vec{a} (1; 0; 3)$ и $\vec{b} (5; 5; 0)$.
7. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} (-1; 2; -2)$ и $\vec{b} (2; 1; -1)$.
8. Найти объем пирамиды построенной на векторах $\vec{a} (1, 2, 3)$, $\vec{b} (1; 1; 1)$ и $\vec{c} (1; 2; 1)$.
9. Дано уравнение одной из сторон квадрата $x + 3y - 7 = 0$ и точка пересечения его диагоналей $P (0; -1)$. Найти уравнения трех остальных сторон этого квадрата.
10. Найти уравнение окружности, проходящей через точки пересечения параболы $y^2 = x + 4$ с осями координат.
11. Вычислить площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $x^2 + 5y^2 = 20$, а две другие совпадают с концами его малой оси.
12. Составить уравнение гиперболы, фокусы которой расположены на оси абсцисс симметрично относительно начала координат, если даны уравнения асимптот $y = \pm \frac{3}{4}x$ и расстояние между фокусами равно 20.
13. Составить уравнение линии, каждая точка которой равноудалена от точки $A (2; 2)$ и от оси абсцисс. Построить линию.
14. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A (-1; 1; 2)$ параллельно плоскости xOy .

**Контрольная работа № 3 по теме
«Функции», «Производные», «Дифференциалы»**

Вариант I

1. Найти области определения следующих функций:

а) $y = \sqrt{x^2 - 6x + 5}$; б) $y = \arccos \frac{2x}{1+x}$;

2. Представить сложные функции в виде композиции основных элементарных функций:

а) $y = 2^{\sin \sqrt[3]{x}}$; б) $y = \sqrt[3]{\lg \sin x^3}$;

3. Построить графики функций:

а) $y = (2x + 3)/(x^2 - 1)$;

в) $y = -2 \sin(2x + 2)$;

4. Построить график функции

$$y = \begin{cases} 1 + x, & \text{если } x < 0, \\ 2 \sin x, & \text{если } 0 \leq x < \pi, \\ x - \pi, & \text{если } x \geq \pi. \end{cases}$$

5. Для функции найти обратную, построить графики данной и найденной функций

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } x \leq 0, \\ x^2, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

6. Найти производные функций

1. 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 3x^3 + 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3$;

б) $y = x^3 \sin x \cdot \ln x$;

в) $y = \sqrt{(x^3 + 1)/(x^3 - 1)}$.

2. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ в точке $x_0 = 1$. (Ответ: $2x + y - 2 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$.)

2. 1. Воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)), найти производную функции $y = (3x - 1)/(2x + 5)$. (Ответ: $y' = 17/(2x + 5)^2$.)

2. Найти производные следующих функций:

а) $y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6$;

б) $y = (x^3 + 1) \cos 5x$;

в) $y = ((x^4 + 1)/(x^4 - 1))^3$.

3. 1. Найти производные следующих функций:

а) $y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2$;

б) $y = x^3 \operatorname{tg} x \cdot e^{2x}$;

в) $y = (\sin^2 x)/(x^3 + 1)$.

2. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t с, $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (s — в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t = 0$; 1; 2 с. (Ответ: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

7. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = x^3 \cdot \ln x$.

8. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой.

9. Найти пределы, используя правило Лопиталья

1.1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$.

1.2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1}$.

1.3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$.

1.4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$.

10. Вычислить значения частных производных функции

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3} - xyz \text{ в точке } M(2; -2; 1).$$

Вычислить $u'_x + u'_y + u'_z$ в точке $M_0(1, 1, 1)$, если $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$. (Ответ: 3/2.)

Вычислить значения частных производных функции $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3, 4)$. (Ответ: 2/5, 1/5.)

Вариант II

1. Найти области определения следующих функций:

а. $y = \sqrt{25 - x^2} + \operatorname{lg} \sin x$.

б. $y = 1/\sqrt{x^2 + x}$.

2. Представить сложные функции в виде композиции основных элементарных функций:

а. $y = \operatorname{tg} \sqrt[5]{\operatorname{lg} x}$;

б. $y = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{2x^4}$.

3. Построить графики функций:

a. $y = |3x + 4 - x^2|;$

b. $y = x \sin x.$

4. Построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leq 0 \\ 1 + 2x, & \text{если } 0 < x < 2 \\ x - 2, & \text{если } x \geq 2 \end{cases}$$

5. Для функции найти обратную, построить графики данной и найденной функций

$$y = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 1, \\ x^2 - 2, & \text{если } x \geq 1, \end{cases}$$

6. Задания по теме «Производные сложных функций»

1. 1. Найти производные следующих функций:

a) $y = 3x^3 + 5\sqrt[3]{x^5} - 4/x^3;$

б) $y = x^3 \sin x \cdot \ln x;$

в) $y = \sqrt{(x^3 + 1)/(x^3 - 1)}.$

2. Записать уравнения касательной и нормали к кривой $y = \ln(x^2 - 4x + 4)$ в точке $x_0 = 1$. (Ответ: $2x + y - 2 = 0$; $x - 2y - 1 = 0$.)

2. 1. Воспользовавшись определением производной (см. формулу (6.2)), найти производную функции $y = (3x - 1)/(2x + 5)$. (Ответ: $y' = 17/(2x + 5)^2$.)

2. Найти производные следующих функций:

a) $y = \sqrt[7]{x^5} - 2/x^4 + 7x^6;$

б) $y = (x^9 + 1) \cos 5x;$

в) $y = ((x^4 + 1)/(x^4 - 1))^3.$

3. 1. Найти производные следующих функций:

a) $y = 4\sqrt{x} + 4/\sqrt{x} + 3x^2;$

б) $y = x^3 \operatorname{tg} x \cdot e^{2x};$

в) $y = (\sin^2 x)/(x^3 + 1).$

2. Расстояние, пройденное материальной точкой за время t с, $s = \frac{1}{4}t^4 - \frac{1}{3}t^3 + 2t + 1$ (s — в метрах). Найти скорость движения данной точки в моменты времени $t = 0$; 1; 2 с. (Ответ: 2 м/с; 2 м/с; 6 м/с.)

Вычислить $u'_x + u'_y + u'_z$ в точке $M_0(1, 1, 1)$, если $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$. (Ответ: 3/2.)

Вычислить значения частных производных функции $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3, 4)$. (Ответ: 2/5, 1/5.)

7. Найти дифференциалы первого, второго и третьего порядков функции $y = x^3 \cdot \ln x$.

8. Найти приближенное значение $\sqrt[4]{17}$ с точностью до двух знаков после запятой.

9. Найти пределы, используя правило Лопиталья

$$1.1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{x+3}}$$

$$1.2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^{\ln x} - x}{x - 1}$$

$$1.3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

$$1.4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - 4 \sin^2(\pi x/6)}{1 - x^2}$$

10. Вычислить значения частных производных функции

$$u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^3} - xyz \text{ в точке } M(2; -2; 1).$$

Вычислить $u'_x + u'_y + u'_z$ в точке $M_0(1, 1, 1)$, если $u = \ln(1 + x + y^2 + z^3)$. (Ответ: 3/2.)

Вычислить значения частных производных функции $z = x + y + \sqrt{x^2 + y^2}$ в точке $M_0(3, 4)$. (Ответ: 2/5, 1/5.)

**Контрольная работа № 4 по теме
«Интегралы», «Ряды», «Дифференциальные уравнения»**

1. Взять неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{(x^2 - 6x + 8)dx}{x^3 + 8}$

б) $\int \frac{(x^2 + 23)dx}{(x+1)(x^2 + 6x + 13)}$

2. Проинтегрировать по частям:

а) $\int (x - 6) \sin \frac{x}{2} dx$;

б) $\int x^2 \cos x dx$;

в) $\int x \cos 5x dx$;

г) $\int (x + 1)e^{2x} dx$.

3. Вычислить определённые интегралы

а) $\int_{-x}^0 \cos nx dx$ б) $\int_{-x}^x \sin nx dx$ в) $\int_0^3 \sin \frac{\pi x}{3} dx$ г) $\int_{-2}^2 \cos \frac{\pi x}{2} dx$

д) $\int_{-x}^0 \sin nx dx$ е) $\int_{-x}^x \cos nx dx$ ж) $\int_0^3 \cos \frac{\pi x}{3} dx$ з) $\int_{-2}^2 \sin \frac{\pi x}{2} dx$

Ряды

4. Найти u_{n+1} и u_{2n-1} члены ряда:

а) $\frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{14} + \dots$; б) $\frac{3}{4 \cdot 2!} + \frac{9}{8 \cdot 3!} + \frac{81}{16 \cdot 4!} + \dots$; в) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + \dots$

5. Выяснить, сходится ряд абсолютно или условно

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{3n+1}}$$

6. Разложить функцию в ряд Маклорена:

$$f(x) = x \cdot \cos 3x$$

7. Разложить в ряд Фурье периодическую (с периодом $T = 2\pi$) функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi; \pi]$. Постройте график данной функции при $x \in [-4\pi; 4\pi]$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leq x < 0; \\ 4x - 3, & 0 \leq x < \pi; \end{cases}$$

8. Определить порядок дифференциального уравнения

$$y'' + y = 0.$$

9. Установить, является ли данная функция решением данного дифференциального уравнения:

$$y = Ce^x \sin x;$$

$$y''' - 2y' + 2y = 0.$$

10. Проинтегрировать дифференциальное уравнение, найти указанные частные решения и построить их:

$$y' = 3x^2; \quad y(0) = 2.$$