Занятие 1. Целые и рациональные числа. Действительные числа.

План

1) *Роль математики в подготовке специалистов среднего профессионального образования.*

2) *Современная электронно-вычислительная техника и области ее применения.*

3) *Понятие о математическом моделировании.*

4) *Множество действительных чисел. Приближения действительных чисел конечными десятичными дробями.*

5) *Числовая прямая. Промежутки. Окрестности точки.*

6) *Простейшие вычисления с помощью МК.*

7) *Формулы сокращенного умножения.*

Числа 1, 2, 3, 4, …… - множество натуральных чисел (N)

Числа $0; \pm 1; \pm 2; \pm 3$, ……. - множество целых чисел (Z)

Числа $0; \pm 2; \pm \frac{1}{2}; \pm 0,78; \pm 1,24; \pm \frac{1}{8}; ...$ - множество рациональных чисел (Q)

Любое рациональное число можно записать в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m $\in$Z , n $\in$N

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{7}{21} = \frac{10}{30} \qquad -\frac{2}{5} = \frac{-2}{5} = \frac{-10}{25} = \frac{-14}{35} = \frac{-20}{50} \qquad 3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{30}{10}$$

$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{8} = \frac{0}{10}$$ и т.д.

Разделив "m" на "n" получаем конечную или бесконечную десятичную дробь

$\frac{1}{4}=0,25$ $\frac{5}{9}=0,5555\ldots$ $-\frac{6}{5}=-1,2$ $-\frac{3}{7}=-0,428571428571\ldots$

$\frac{1}{3}=0,3333\ldots$ $4\frac{47}{90}=4,5222$

Как видим, у некоторых дробей десятичные знаки повторяются

0,5555 ……; 0,3333 ……; 4,5222 …….;

Такие числа называются периодическими десятичными дробями и записываются:

4,959595 … = 4, (95) 2,125125125 … = 2, (125)

0,5121212 … = 0,5 (12) 2,13444 … = 2,13 (4)

Каждая бесконечная периодическая дробь представляет собой рациональное число (докажем несколько позже), а пока будем использовать правило записи в виде обыкновенной дроби:

$4,(95)=4\frac{95}{99};$ $1,83(4)=1\frac{834-83}{900}=1\frac{751}{900};$ $0,(5)=\frac{5}{9};$

$0,5(19)=\frac{519-5}{990}=\frac{514}{990}=\frac{257}{495}$ $3,(421)=3\frac{421}{999}$

для чисто периодической дроби: в числителе пишется число, стоящее в периоде, а в знаменателе столько "9", сколько цифр в периоде, целая часть остается без изменения.

для смешанной периодической дроби: в числителе разность между числом, стоящим после запятой, и числом, стоящим после запятой до периода, а в знаменателе столько "9", сколько цифр в периоде, со столькими "0", сколько цифр после запятой до периода

Запишите в виде обыкновенной дроби:

5,21 (3) 13, (71) 14,72 (24) 0, (4)

0,7 (125) 10, (125)

Числа, представляющие собой бесконечные непериодические десятичные дроби, называются иррациональными:

4,1728 …. 0,1078612 … 13,200941 …

$\sqrt{3} = 1,7321....$ $\sqrt{2} = 1,41....$ $\pi = 3,14...$

$e \approx 2,718...$(число Непера)

Теорема.Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2 (предлагается самостоятельно рассмотреть доказательство Числа рациональные и иррациональные составляют множество действительных (вещественных) чисел (R). Действительные числа изображаются геометрически на прямой, которая называется осью действительных чисел

Вы уже знакомы с числовыми множествами, называемыми **промежутками.** Перечислим их.

Отрезок с концами a и b:

[a;b] = $\{x \in R \mid a \le x \le b\}$

Интервал с концами a и b

(a,b) = $\{x \in R \mid a < x < b\}$

Полуоткрытые промежутки:

(a,b] = $\{x \in R \mid a < x \le b\}$; [a,b) = $\{x \in R \mid a \le x < b\}$

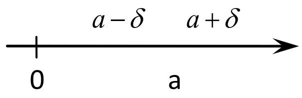
Число b - a называется *длиной* промежутка

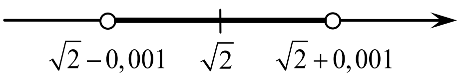
Бесконечные промежутки(лучи, полупрямые):

$$\left(a;+\infty\right)=\left\{x\in R \mid x>a\right\}; \qquad \left[a;+\infty\right)=\left\{x\in R \mid x\geq a\right\};$$
$$\left(-\infty;a\right)=\left\{x\in R \mid x<a\right\}; \qquad \left(-\infty;a\right]=\left\{x\in R \mid x\leq a\right\}.$$

Числовая прямая: $\left(-\infty;+\infty\right)=\mathrm{R}$

Интервал вида $\left(a-\delta;a+\delta\right)$ называют также δ-окрестностью *точки a*





Можно сказать, например, что все десятичные приближения по недостатку и по избытку к числу $\sqrt{2}$, начиная с третьего (т.е. приближения $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-n} при n $\geq$ 3), попадают в δ- окрестность точки $\sqrt{2}$ при δ = 0,001.

При выполнении действий над действительными числами используют правила округления числа

4,762 $\approx$ 4,76 (с точностью до 0,01)

4,762 $\approx$ 4,8 (с точностью до 0,1)

4,762 $\approx$ 5 (с точностью до целых чисел)

Формулы сокращенного умножения

$(а + в)^2 = а^2 + 2 а в + в^2$ $(а - в)^2 = а^2 - 2 а в + в^2$ $(а^2 - в^2) = (а + в) (а - в)$ $(а^3 - в^3) = (а - в) (а^2 + а в + в^2)$ $(а^3 + в^3) = (а + в) (а^2 - а в + в^2)$ $(а + в)^3 = а^3 + 3 а^2 в + 3 а в^2 + в^3$ $(а - в)^3 = а^3 - 3 а^2 в + 3 а в^2 - в^3$ $(а + в + с)^2 = а^2 + в^2 + с^2 +2 а в + 2 а с +2 в с$

Выполнить действия (самостоятельно)

1. $(4а + 3с)^2$
2. $(x^3 - 2y + 3xy)^2$
3. $(2x - 3y^2 - x^3y)^2$
4. $(x^2 - 3y) (x^2 + 3y)$
5. $(x + 2y) (x^2 - 2xy + 4y^2)$

Контрольные вопросы

1. *Всякая ли обыкновенная дробь - число рациональное?*

2. *Может ли быть рациональное число отрицательным?*

3. *Почему бесконечную периодическую десятичную дробь считают рациональным числом?*

4. *Назовите числа рациональные, иррациональные*

2,75354276; *5, 3 (71);* $\sqrt{7}$

15,171 171 171 …; *4, 36 (5);* $\sqrt{\frac{4}{9}}$*;* π

0, 36 78 ..; *1,276 ..;*

5. Какие числа, кроме рациональных и иррациональных являются действительными?

6. Можно ли утверждать, что квадратный корень из любого натурального числа есть число иррациональное?

7. Можно ли утверждать, что квадратный корень из любого нечетного числа есть число иррациональное?

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Раздел 2. Корни, степени и логарифмы

Занятие 2. Корни натуральной степени из числа и их свойства. Степени с рациональными показателями, их свойства.

<u>*План*</u>

1.Корни натуральной степени.

2. Свойства корней.

3. Степени с натуральным, целым и действительными показателями.

Свойства степени.

1. Вспомнить свойства степени с рациональным показателем.

$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = a^n$ для натурального n

a^n – степень; а – основание степени; n – показатель степени.

Для степени с рациональным показателем n:

$a > 0 \quad a^n > 0$

$a < 0 \begin{cases} n - четн. & a^n > 0 \\ n - нечет. & a^n < 0 \end{cases}$

$a^0 = 1$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$(abc)^n = a^n b^n c^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

(прочесть свойства словами, а также справа налево)

2. Обобщим понятие степени

<u>Определение</u>: Пусть действительное число α записано в виде бесконечной десятичной дроби, и пусть α_n, $n \in N$, последовательность его

десятичных приближений. Тогда для любого действительного числа a> 0 степень a^{α} определяется равенством $a^{\alpha} = \lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}$

а) Пусть a> 1 и $\alpha > 0$, например $10^{\sqrt{2}}$. Степень $10^{\sqrt{2}}$ означает такое число, которое больше всякой степени 10^{α_1}, но меньше всякой степени 10^{α_2}, где α_1 и α_2 – любые рациональные приближённые значения числа $\sqrt{2}$, взятые с недостатком и избытком.

С недостатком $10^{1,4};10^{1,41};10^{1,414};10^{1,4142}\ldots$

С избытком $10^{1,5};10^{1,42};10^{1,415};10^{1,4143}\ldots$

б) Пусть a< 1, но $\alpha > 0$, например $0,5^{\sqrt{2}}$. Тогда под степенью a^{α} разумеют такое число, которое <u>меньше</u> всякой степени a^{α_1}, но не больше всякой степени a^{α_2}. Т. е. $0,5^{\sqrt{2}}$ есть число, меньшее каждого из чисел ряда $0,5^{1,4};0,5^{1,41};0,5^{1,414};0,5^{1,4142}\ldots$, но большее каждого из чисел ряда $0,5^{1,5};0,5^{1,42};0,5^{1,415};0,5^{1,4143}\ldots$. Таким образом, если иррациональное число α заключено между двумя рациональными числами α_1 и α_2, то степень a^{α} заключена между степенями a^{α_1} и a^{α_2} и тогда, когда a> 1, и тогда, когда a< 1.

в) Пусть a> 1, a< 1 и $\alpha < 0$, например $10^{-\sqrt{2}};0,5^{-\sqrt{2}}$.

Тогда выражению a^{α} придают тот же смысл, какой имеют степени с отрицательным рациональным показателем

$$10^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{10^{\sqrt{2}}}; \qquad 0,5^{-\sqrt{2}} = \frac{1}{0,5^{\sqrt{2}}}$$

Таким образом можно сказать, что все свойства показателей рациональных применимы и к показателям иррациональным

$$a^{\alpha} \cdot a^{\beta} = a^{\alpha+\beta}; \ \left(a^{\alpha}\right)^{\beta} = a^{\alpha\cdot\beta}$$

И значит записанные выше свойства степени с рациональным показателем справедливы для степени с любым действительным показателем (прочесть свойства словами ещё раз).

Вычислить

$$1)\, 3^{\sqrt{45}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{20}} - \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{-0,25} \cdot 36^{\frac{1}{2}} \cdot 0,1^{-1} =$$

воспользуемся свойствами степени

$$= 3^{3\sqrt{5}} \cdot 3^{-2\sqrt{5}} - \left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5} \cdot \left(6^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot 10 = 3^{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}} - 4^{0,5} \cdot 6 \cdot 10 = 3^{\sqrt{5}} - 2 \cdot 6 \cdot 10 = 3^{\sqrt{5}} - 120 = 11,66 - 120 = -108,$$

$$2)\ 6^{-\sqrt{8}} \cdot 6^{\sqrt{18}} - (-5)^0 \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt[-5]{0,00032}$$

<u>Решение</u>:

$$6^{-2\sqrt{2}} \cdot 6^{3\sqrt{2}} - (-1) \cdot 16 \cdot 2 + \left(\frac{32}{100000}\right)^{-\frac{1}{5}} = 6^{\sqrt{2}} + 32 + \left(\left(\frac{2}{10}\right)^5\right)^{-\frac{1}{5}} = 6^{\sqrt{2}} + 32 + \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 6^{\sqrt{2}} + 32 + 5 = 49,6$$

Самостоятельно:

3)

$$2^{\sqrt{80}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{45}} + 0,125^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}} = 2^{\sqrt{80}} \cdot 2^{-\sqrt{45}} + 8^{\frac{1}{3}} - 8^{\frac{1}{2}} = 2^{4\sqrt{5}} \cdot 2^{-3\sqrt{5}} + 2 - 2\sqrt{2} = 2^{\sqrt{5}} + 2 - 2\sqrt{2} = 3,88$$

3. Функция вида $y = x^n$ называется степенной функцией.

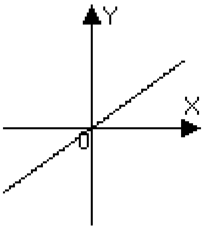
x – аргумент (основание степени)

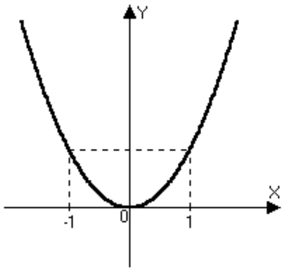
n– показатель степени.

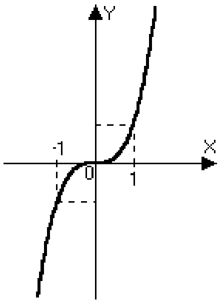
Рассмотрим графики функций при $n = \pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}$

<u>При n> 0</u>

$n = 1\ \ y = x$ $\qquad\qquad$ $n = 2 \quad y = x^2$ $\qquad\qquad$ $n = 3 \quad y = x^3$

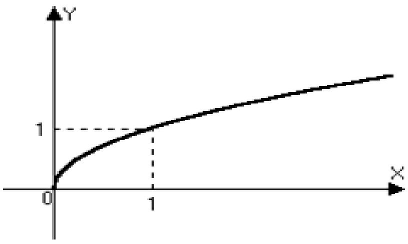


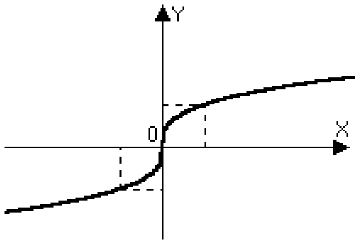


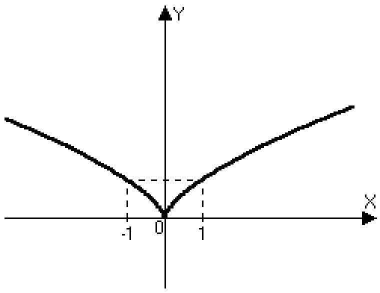


$n=\frac{1}{2}\quad y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\,;\,x\geq 0\quad n=\frac{1}{3}\quad y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}\,;\; x\in R\qquad n=\frac{2}{3}\quad y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$

$x\in R;\ y>0$





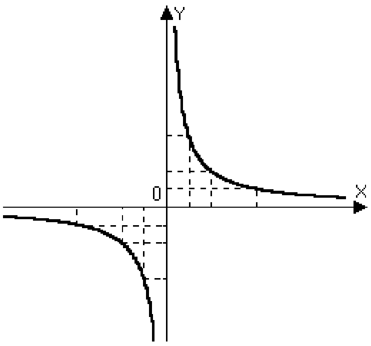


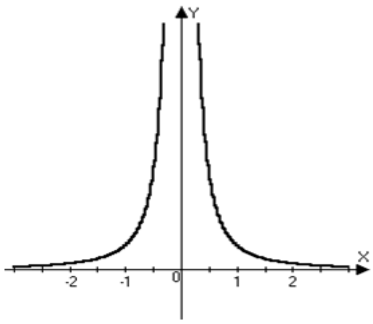
<u>При n< 0</u>

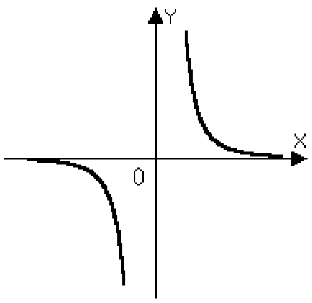
$n = -1;\ y = x^{-1} = \dfrac{1}{x};\quad x \neq 0$

$n = -2;\ y = x^{-2} = \dfrac{1}{x^2};\quad x \neq 0$

$n = -3;\ y = x^{-3} = \dfrac{1}{x^3};\quad x \neq 0$



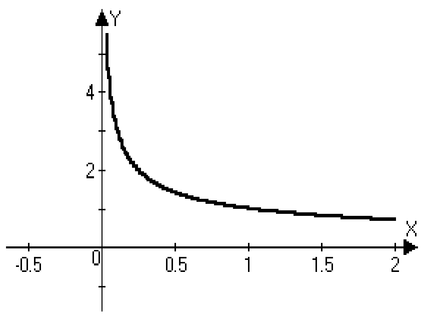


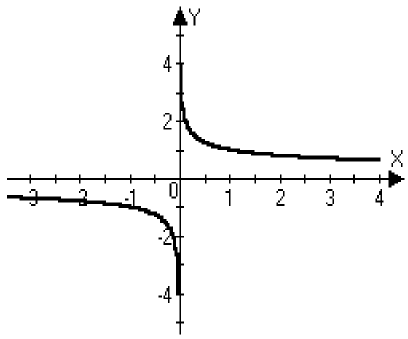


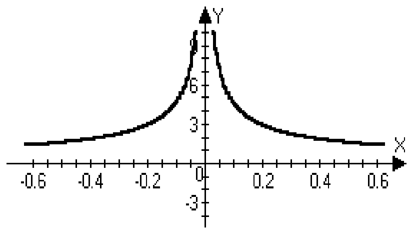
$n = -\dfrac{1}{2};\quad y = x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x}};\quad x > 0$

$n = -\dfrac{1}{3};\quad y = x^{-\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}};\quad x \neq 0$

$n = -\dfrac{2}{3};\quad y = x^{-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\quad x \neq 0$







Отметим свойства общие для степенных функций:

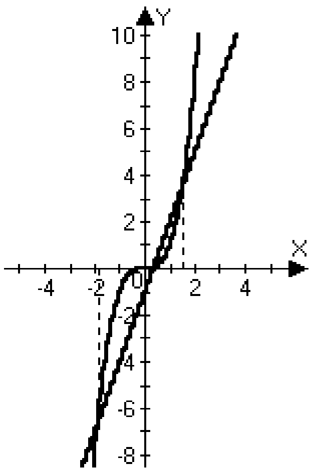
1) при $n > 0$ $x > 0$ функция возрастающая

2) при $n < 0$ $x > 0$ функция убывающая

<u>Применение</u>: используя графики степенных функций можно графически решать некоторые алгебраические уравнения.

<u>Например</u> $x^3 - 3x + 1 = 0;$ $x^3 = 3x - 1$

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x - 1 \end{cases}$$



$x_1 = -1.88$
$x_2 = 0.35$
$x_3 = 1.53$

Корни приближённые, но другим способом это уравнение решить нельзя!

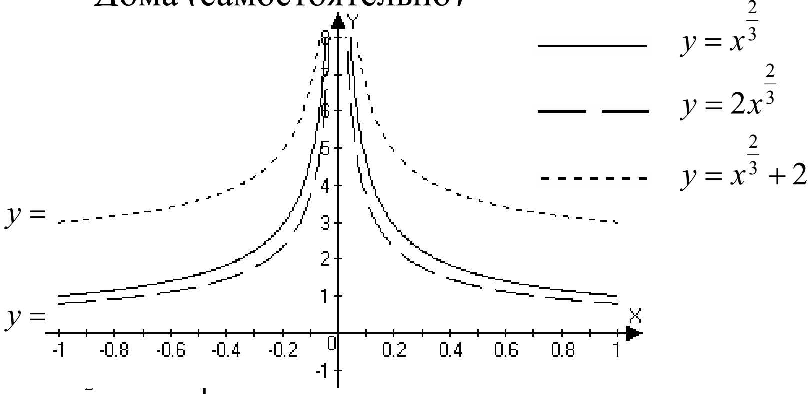
Построить схематически графики функций:

1) $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$

2) $y = 2x^{\frac{2}{3}}$

3) $y = x^{\frac{2}{3}} + 2$

Дома (самостоятельно)



$y = x^{-\frac{2}{3}} + 2 = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} + 2 \qquad x \neq 0$

Вычислить самостоятельно:

1.19 $\left(\frac{1}{10}\right)^{-5} \cdot 10^{-2} + \frac{0,5^{-2} - \left(\frac{2}{7}\right)^0}{(-2)^{-2}} = 10^5 \cdot 10^{-2} + \frac{2^2 - 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 10^3 + \frac{3}{\frac{1}{4}} = 1000 + 12 = 1012$;

1.21 $\sqrt{\sqrt{65} - 7} \cdot \sqrt{\sqrt{65} + 7} = \sqrt{65 - 49} = \sqrt{16} = 4$;

2.2 $\left(3a^{\frac{2}{3}} - b^{-1}\right)\left(3a^{\frac{2}{3}} + b^{-1}\right) = \left(3a^{\frac{2}{3}}\right)^2 - \left(b^{-1}\right)^2 = 9a^{\frac{4}{3}} - b^{-2} = 9a\sqrt[3]{a} - \frac{1}{b^2}$;

2.4

$$\left(\sqrt{2+\sqrt{3}} + \sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2 = 2 + \sqrt{3} + 2\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}} + 2 - \sqrt{3} = 4 + 2 + \sqrt{4-3} = 4 + 2 \cdot 1 = 6$$

с последующей проверкой результата.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 3. Логарифм числа. Основное логарифмическое тождество. Правила действий с логарифмами.

<u>План</u>

1. Определение логарифма.

2. Основное логарифмическое тождество.

3. Десятичный логарифм.

4. Натуральный логарифм.

5. Свойства логарифмов.

Как можно найти показатель степени из равенства: $2^x = 14$? Никакие известные нам действия не помогут. Вот поэтому вводится новое понятие, понятие логарифма.

<u>Определение</u>: Логарифмом числа называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число: $\log_a b = c$; $a > 0$ согласно определения имеем $a^c = b$, и тогда $a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.

$5^{\log_5 2} = 2$; $0,2^{\log_{0,2} 3} = 3$.

Логарифмы обладают свойствами:

1.1. Логарифмы отрицательных чисел на существуют (положительное число в любой степени есть число положительное).

1.2. Логарифм единицы при любом основании равен нулю, $\log_a 1 = 0$, т.к $a^0 = 1$.

1.3. Логарифм самого основания равен 1, то есть $\log_a a = 1$, т.к. $a^1 = a$

1.4. Логарифм произведения при любом основании равен сумме логарифмов сомножителей при этом же основании.

$$\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$$

Покажем, что это так:

Пусть $\log_a N_1 = n_1$ и $\log_a N_2 = n_2$; по определению логарифма имеем $N_1 = a^{n_1}$ и $N_2 = a^{n_2}$

$N_1 \cdot N_2 = a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1+n_2}$; отсюда $n_1 + n_2 = \log_a(N_1 \cdot N_2)$ и тогда $\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$, что и требовалось доказать!

1.5. Логарифм дроби при любом основании равен разности логарифма числителя и логарифма знаменателя при этом же основании

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$$

(доказательство аналогично свойству 4, докажите самостоятельно. Можно воспользоваться подсказкой учебника)

1.6. Логарифмом степени при любом основании равен произведению показателя степени на логарифм основания степени.

$$\log_a N^m = m \cdot \log_a N$$

Логарифм числа с основанием 10 называется десятичным и имеет особую запись.

$$\log_{10} b = \lg b$$

Логарифм числа с снованием *e* называется натуральным и имеет также особую запись $\log_e b = \ln b$. $e \approx 2{,}718$ число Непера.

И десятичный, и натуральный логарифмы любого числа можно находить при помощи МК

$\lg 17{,}4 = 1{,}2405$ $\ln 0{,}384 = -0{,}9571$

17,4 $\boxed{\log}$ 0,384 $\boxed{\ln}$

А если надо вычислить логарифм числа при любом основании? Что делать? Надо перейти к основанию 10 или *e*.

По определению логарифма $a^{\log_a N}=N$, используя свойство логарифмов (смотрите свойство 6) имеем $\log_b N=\log_a N\cdot\log_b a$

и тогда $\boxed{\log_a N=\dfrac{\log_b N}{\log_b a}}$ и называется формулой перехода от одной системы логарифмов к другой. Эта формула часто применяется при решении логарифмических уравнений и неравенств $\log_a N=\dfrac{\lg N}{\lg a};\log_a N=\dfrac{\ln N}{\ln a}$, что даёт возможность вычисления выполнять при помощи МК.

Решить: $\log_{1,24}618,7=\dfrac{\lg 618,7}{\lg 1,24}=29,88$

$\log_{1,24}618,7=\dfrac{\ln 618,7}{\ln 1,24}=29,88$

Как видно результаты равные поэтому можно делать переход к любому основанию.

Проверьте результат: $\log_{1,2}0,784=-1,3347$ $\quad\log_{0,34}11,78$

Самостоятельно: $\log_{0,38}6,24;\quad\log_{1,2}0,00412,$ а затем решаются №№

Пособие: стр. 28 № 3.27 вместе с преподавателем; № 3.21; 3.23 – самостоятельно (с последующей проверкой)

Замечания: 1) $\log_a b=\dfrac{\log_b b}{\log_b a}=\dfrac{1}{\log_b a}$, т.е. 2) $\boxed{\log_{a^n} b=\dfrac{1}{n}\log_a b}$

3) $\boxed{\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}}$

Используя определение логарифма, можно находить переменную.

Рассмотрим на конкретных примерах

$\log_{\sqrt{3}}x=-2$ по определению логарифма $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}=x\;\Rightarrow\;x=\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-2}=3^{-1}=\dfrac{1}{3}$

$\log_x\dfrac{1}{27}=-3$ по определению логарифма

$x^{-3}=\dfrac{1}{27}\;\Rightarrow\;\dfrac{1}{x^3}=\dfrac{1}{27};\quad x^3=27;\quad x=3$

$\log_{\sqrt[3]{2}} 64 = x$ по определению логарифма

$\left(\sqrt[3]{2}\right)^x = 64 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{1}{3}x} = 64 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{1}{3}x} = 2^6; \;\; \frac{1}{3}x = 6; \;\; x = 18$

Решить. Пособие стр. 28 № 3; 4; 3.8; 3.9; 3.11; 3.16; 3.20

3.4 $\log_{\sqrt{x}} 8 = 3; \;\; \left(\sqrt{x}\right)^3 = 8; \;\; \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 8; \;\; x^{\frac{3}{2}} = 8; \;\; \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}}; \;\; x = 2^2 = 4$

3.8

$\log_{\frac{2}{3}} 2,25 = x; \;\; \left(\frac{2}{3}\right)^x = 2\frac{1}{4}; \;\; \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{4}; \;\; \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2; \;\; \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}; \;\; \Rightarrow \;\; x = -2$

3.9

$\log_{5\sqrt[3]{5}} x = -0,8; \;\; \left(5\sqrt[3]{5}\right)^{-0,8} = x; \;\; x = \left(5 \cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = 5^{-\frac{16}{15}} = \frac{1}{5^{\frac{16}{15}}} = \frac{1}{5^{1\frac{1}{15}}} = \frac{1}{5\sqrt[15]{5}};$

3.11

$\log_{0,6} 4\frac{17}{27} = x; \;\; 0,6^x = 4\frac{17}{17}; \;\; \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{125}{27}; \;\; \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5^3}{3^3}; \;\; \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{5}{3}\right)^3; \;\; \left(\frac{3}{5}\right)^x = \left(\frac{3}{5}\right)^{-3}; \;\; x = -3$

3.16 $\log_4 36 + \log_2 10 - 2\log_2 \sqrt{15} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 5} = \log_{2^2} 6^2 + \log_2 10 - 2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 15 + 2^{2 \cdot \frac{1}{2}\log_2 5} =$

$= \frac{2}{2}\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 15 + 2^{\log_2 5} = \log_2 \frac{6 \cdot 10}{15} + 5 = \log_2 4 + 5 = 2 + 5 = 7$

3.20

$0,04^{1+\log_5 0,02} - \sqrt{2}^{\log_2 25} = \left(\frac{1}{25}\right)^{1+\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \frac{1}{25} \cdot 5^{-2\log_5 \frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} =$

$= \frac{1}{25} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^{-2} - 25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{25} \cdot 2500 - 5 = 100 - 5 = 95$

Самостоятельно:

3.10 $\log_{2\sqrt[5]{2}} x = \frac{5}{6}$ $\qquad x = \left(2\sqrt[5]{2}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(2^1 \cdot 2^{\frac{1}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = \left(2^{\frac{6}{5}}\right)^{\frac{5}{6}} = 2$

3.12 $\log_{3\sqrt{3}}\frac{1}{81}=x \quad \left(3\sqrt{3}\right)^x=\frac{1}{81};\ 3^{\frac{3}{2}x}=3^{-4}$ 3.14

$$\frac{\log_3 27-\log_3 1}{\log_3 4,5+\log_3\frac{2}{3}}=\frac{3-0}{\log_3\left(\frac{9}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{\log_3 3}=\frac{3}{1}=3$$

3.18 $49^{1-\log_7 2}-5^{-\log_5 4}=\frac{49}{49^{\log_7 2}}-4^{-1}=\frac{49}{7^{2\log_7 2}}-\frac{1}{4}=\frac{49}{4}-\frac{1}{4}=\frac{48}{4}=12$

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 4. Правила действий с логарифмами. Основное логарифмическое тождество

<u>*План*</u>

1. Логарифмирование выражений.

2. Потенцирование выражений.

3. Преобразование алгебраических выражений.

1. Логарифмирование выражений.

<u>Определение</u>: Действие нахождения логарифма числа называется действием логарифмирования.

Рассмотрим на примере.

Пусть дано число в общем виде

$$x = \frac{a^3 \cdot b^2 \cdot \sqrt[5]{(a+b)^2}}{(a-b)^4 \cdot \sqrt{a^2+b^2}}$$

Найдём логарифм числа x, используя свойства логарифмов (логарифм дроби, произведения, степени при любом основании)

Так как можно находить логарифм при любом основании, то договорились основание не писать.

$$\log x = \log\left(a^3 \cdot b^2 \sqrt[5]{(a+b)^2}\right) - \log\left((a-b)^4 \cdot \sqrt{a^2+b^2}\right) = \log a^3 + \log b^2 + \log\sqrt[5]{(a+b)^2} - \log(a-b)^4 -$$

$$-\log\sqrt{a^2+b^2} = 3\log a + 2\log b + \frac{2}{5}\log(a+b) - 4\log(a-b) - \frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right)$$

Однако так подробно не следует каждый раз расписывать, а сразу следует применять свойства логарифмов и писать результат.

Например: $x = \dfrac{2a^{-5}b^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(a-b)^2}}{3(a-b)^4}$

$$\log x = \log 2 - 5\log a + \frac{2}{3}\log b + \frac{2}{3}\log(a-b) - \log 3 - 4\log(a-b)$$

Решим совместно (доска – группа)

Стр. 28 пособие «Сборник материалов»

№ 4.5; $\log y=\frac{2}{5}\log a+\frac{1}{15}\log\left(b+c\right)-\frac{3}{5}\log\left(a+b\right)+\frac{2}{5}\log b$

№ 4.6; $\log z=\frac{2}{3}\log a+\frac{1}{3}\log 4-\frac{1}{3}\log b-\log 5-\frac{1}{2}\log\left(a-b\right)-2\log\left(a+b\right)$

№ 4.7; $\log x=-\frac{2}{3}\log a+2\log b+\frac{1}{2}\log\left(a^2-b^2\right)-\log 2-2\log\cos\alpha=$

$=-\frac{2}{3}\log a+2\log b+\frac{1}{2}\log\left(a+b\right)+\frac{1}{2}\log\left(a-b\right)-\log 2-2\log\cos\alpha$

№ 4.8; $\log x=\log 5-2\log m+\frac{1}{2}\log n+\log\sin 3\lambda-\log 3-2\log\sin\lambda-\frac{1}{2}\log\cos\lambda$

2. Потенцирование выражений

Действие нахождения числа по его логарифму называется действием потенцирования.

Как видно: потенцирование – есть обратное действие логарифмированию.

Пример. $\log x=\frac{2}{5}\log\left(a+b\right)-2\log a-\frac{1}{2}\log b$

Знак минус говорит о том, что число представлено дробью, коэффициенты перед логарифмом – показатели степени.

И тогда $x=\frac{\left(a+b\right)^{\frac{2}{5}}}{a^2\cdot b^{\frac{1}{2}}}=\frac{\sqrt[5]{\left(a+b\right)^2}}{a^2\cdot\sqrt{b}}$;

Стр. 29 пособие «Сборник материалов»

5.1 $x=\frac{a\cdot\left(a+b\right)^2}{\sqrt[3]{a-b}}$

5.3 $x=\left(a+b\right)^{-1}\cdot\sqrt[5]{\frac{a^2\cdot\sqrt{b}}{\sqrt[3]{\left(a-b\right)^2}}}$

5.5 $x=\sqrt[3]{\left(\frac{a}{b^2}\right)^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}$

5.7 $x=\frac{\left(a-b\right)^3}{4\cdot 3\cdot\sqrt{a\cdot\sqrt{b}}}=\frac{\left(a-b\right)^3}{4\sqrt{a\cdot\sqrt{b}}}$

5.8 $\log_{5,2} x = 0,38$ $x = 5,2^{0,38} = 1,871$

5.10 $\lg x = -0,276$ $x = 10^{-0,276} = 0,530$

5.12 $\ln x = 0,607$ $x = e^{0,607} = 1,835$

Решаются примеры (поясняет преподаватель) из Пособия «Вычисления по МК» сложность 5 вариант 1 примеры 2 и 4

Затем самостоятельно (закрепление).

Контрольные вопросы:

1. *Что называется логарифмом числа?*
2. *Какое действие называется действием логарифмирования? Потенцирования?*
3. *Свойства логарифмов?*
4. *Какие логарифмы называются десятичными? Натуральными?*
5. *Логарифмическое тождество. Примеры (карточки).*

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятия 5-8. Радианная мера угла. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа. Основные тригонометрические тождества. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов. Синус и косинус двойного угла. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.

<u>План</u>

1. Радианная мера угла.

2. Синус, косинус, тангенс и котангенс числа.

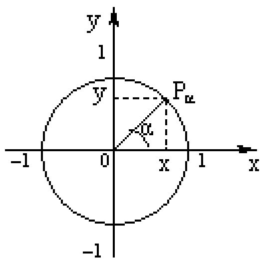
3. Основные тригонометрические тождества.

4. Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов.

5. Синус и косинус двойного угла.

6. Преобразования суммы тригонометрических функций в произведение и произведения в сумму.

Определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.



$P_\alpha(x;\ y)$
$x = \cos\alpha$
$y = \sin\alpha$
$|\cos\alpha| \le 1$
$|\sin\alpha| \le 1$

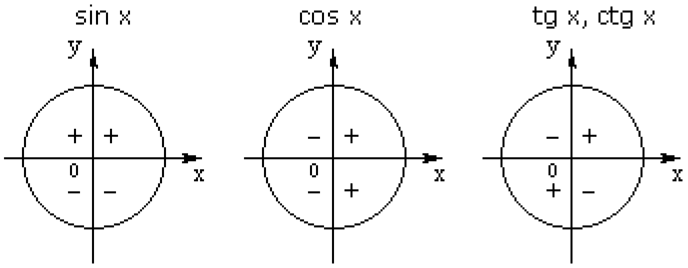
$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \ne \pi k,\ k \in Z$

Основные тождества:

$\sin^2 a + \cos^2 a = 1$
$\operatorname{tg} a \cdot \operatorname{ctg} a = 1$

Знаки тригонометрических функций:



Значения тригонометрических функций

α	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
ctg α	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Формулы синуса, косинуса, тангенса и котангенса угла (–α):

sin (–α) = – sin α

cos (–α) = cos α

tg (–α) = – tg α

ctg (–α) = – ctg α

Формулы приведения:

Функции	Углы							
	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi k-\alpha$	$2\pi k+\alpha$
sin	cos α	cos α	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	–sin α	sin α
cos	sin α	– sin α	– cos α	– cos α	– sin α	sin α	cos α	cos α
tg	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α	ctg α	– ctg α	– tg α	tg α
ctg	tg α	– tg α	– ctg α	ctg α	tg α	– tg α	–ctg α	ctg α

Все формулы приведения можно получить, пользуясь следующими правилами:

1. В правой части формулы ставится тот знак, который имеет левая часть при

условии

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

2. Если в левой части формулы угол равен $\pi/2 \pm \alpha$ или $3\pi/2 \pm \alpha$, то синус заменяется на косинус, тангенс на котангенс и наоборот, если угол равен $\pi \pm \alpha$ или $2\pi k \pm \alpha$, то замены не происходит.

Формулы сложения.

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha \pm \mathrm{tg}\beta}{1 \mp \mathrm{tg}\alpha \cdot \mathrm{tg}\beta}$$

Формулы двойного угла.

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$
$$2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\mathrm{tg}\, 2\alpha = \frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

Формулы перехода от суммы к произведению.

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha \pm \beta}{2}\cos\frac{\alpha \mp \beta}{2}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha + \beta}{2}\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$
$$\mathrm{tg}\,\alpha \pm \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

Формулы перехода от произведения к сумме.

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$
$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$
$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

Формулы понижения степени.

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$
$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{1 + \cos 2\alpha}$$

Преобразование выражения $a\cdot\cos\alpha + b\cdot\sin\alpha$ путем введения вспомогательного аргумента.

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\alpha-\varphi),\ a^2+b^2 \neq 0,$$

где вспомогательный аргумент определяется из условий

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \text{ и } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятия 9-10. Обратные тригонометрические функции. Простейшие тригонометрические уравнения.

План

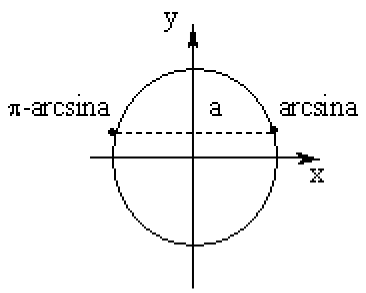
1. Обратные тригонометрические функции.

2. Решение простейших тригонометрических уравнений.

Простейшие тригонометрические уравнения.

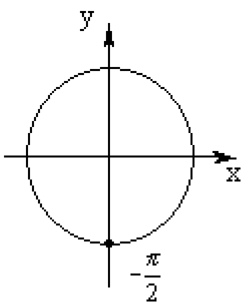
1. $\sin x = a,\ |a| \le 1$

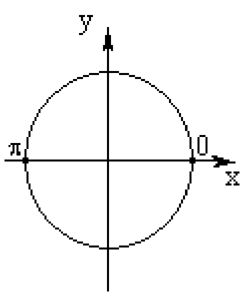
$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$

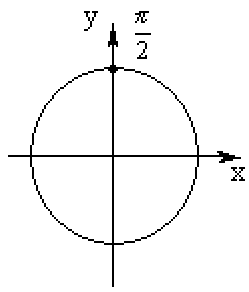


Частные случаи:

$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\sin x = -1$	$\sin x = 0$	$\sin x = 1$
$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$	$x = \pi k,\ k \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$



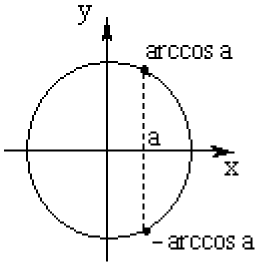




$|a| > 1$ корней нет

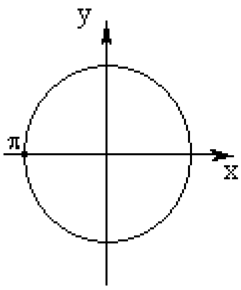
2. $\cos x = a$, $|a| \leq 1$

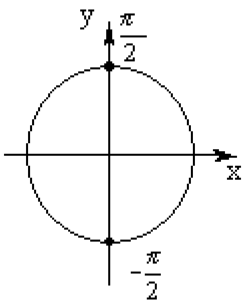
$x = \pm \arccos a + 2\pi k$, $k \in Z$

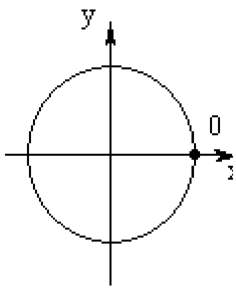


Частные случаи:

$a = -1$	$a = 0$	$a = 1$
$\cos x = -1$	$\cos x = 0$	$\cos x = 1$
$x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$	$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$	$x = 2\pi k$, $k \in Z$







$|a| > 1$ корней

нет

3. $\mathrm{tg}\, x = a$, $a \in R$

$x = \pm \mathrm{arctg}\, a + \pi k$, $k \in Z$

Основные типы тригонометрических уравнений.

1. Уравнения, сводящиеся к простейшим.

2. Уравнения, сводящиеся к квадратным.

3. Однородные уравнения: asinx + bcosx = 0, $a\sin^2$x + b sinxcosx + $c$cos^{2}x = 0.

4. Уравнения вида a sinx + b cosx = c , $c \neq 0$.

$$a\sin x + b\cos x = c \ \Big|: \sqrt{a^2+b^2},$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Поскольку

$$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2+\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1,$$

можно ввести вспомогательный угол φ такой, что

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Уравнение примет вид:

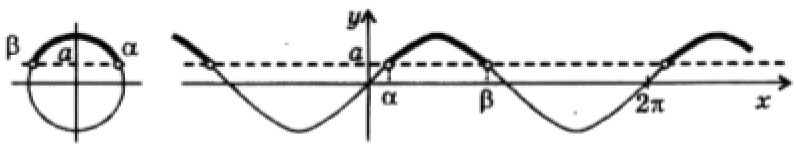
5. $$\sin(x+\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

6. Уравнения, решаемые разложением на множители.

7. Нестандартные уравнения.

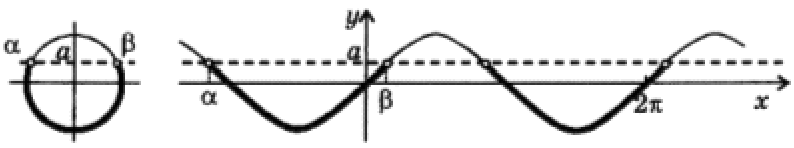
Неравенства : sin x > a, sin x ≥ a, sin x < a, sin x ≤ a

Sin x > a ⇔ arcsin a + 2 πn < x < π– arcsin a + 2 πn, n ∊Z



α = arcsin a; β = π – arcsin a.

sin x<a ⇔ – π– arcsin a + 2 πn<x<arcsin a + 2 π n, n ∊ Z



α = – π – arcsin a ; β = arcsin a.

В случае нестрогих неравенств знаки < и > в решениях заменяются соответственно на ≤ и ≥.

a=-1	a=1
$\sin x < -1$ – решений не $\sin x \le -1 \Leftrightarrow x = -\pi/2+2$ $\sin x > -1 \Leftrightarrow x \ne -\pi/2+2$ $\sin x \ge -1 \Leftrightarrow x \in R$	$\sin x < 1 \Leftrightarrow x \ne -\pi/2+2\pi n$ $\sin x \le 1 \Leftrightarrow x \in R$ $\sin x > 1$ – решений нет $\sin x \ge 1 \Leftrightarrow x = -\pi/2+2\pi n$
$a < -1$	$a > 1$
$\sin x < a \cdot (\le a)$ – решений $\sin x > a \cdot (\ge a) \Leftrightarrow x \in R$	$\sin x < a \cdot (\le a) \Leftrightarrow x \in R$ $\sin x > a \cdot (\ge a)$ – решений

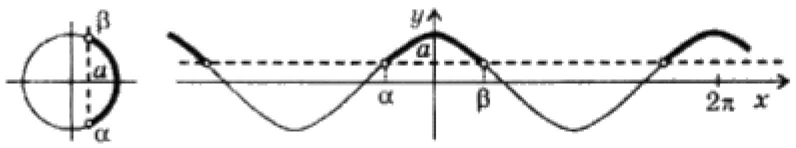
Во всех приведенных здесь формулах $n \in Z$.

Неравенства:

$\cos x > a$; $\cos x \ge a$; $\cos x < a$; $\cos x \le a$.

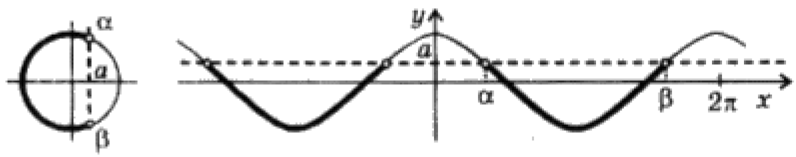
$\boxed{|a| < 1}$

$$\cos x > a \Leftrightarrow -\arccos a + 2\pi n < x < \arccos a + 2\pi n,$$
$$n \in Z$$



$\alpha = -\arccos a$; $\beta = \arccos a$

$$\cos x < a \Leftrightarrow \arccos a + 2\pi n < x < 2\pi - \arccos a + 2\pi n,$$
$$n \in Z$$



$\alpha = \arccos a$; $\beta = 2\pi - \arccos a$

В случае нестрогих неравенств знаки < и > в решениях заменяются соответственно на ≤ и ≥.

a=-1	a=1
$\cos x < -1$ – решений нет $\cos x \le -1 \Leftrightarrow x = \pi + 2\pi n$ $\cos x > -1 \Leftrightarrow x \ne \pi + 2\pi n$ $\cos x \ge -1 \Leftrightarrow x \in R$	$\cos x < 1 \Leftrightarrow x \ne 2\pi n$ $\cos x \le 1 \Leftrightarrow x \in R$ $\cos x > 1$ – решений нет $\cos x \ge 1 \Leftrightarrow x = 2\pi n$
$a < -1$	$a > 1$
$\cos x < a \cdot (\le a)$ – решений $\cos x > a \cdot (\ge a) \Leftrightarrow x \in R$	$\cos x < a \cdot (\le a) \Leftrightarrow x \in R$ $\cos x > a \cdot (\ge a)$ – решений

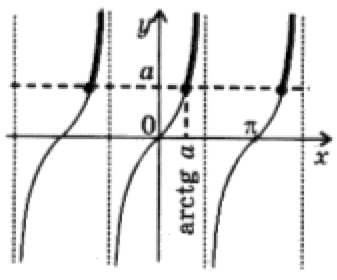
Во всех приведенных здесь формулах $n \in Z$.

Неравенства:

tg x > a; tg x ≥ a; tg x < a; tg x ≤ a.

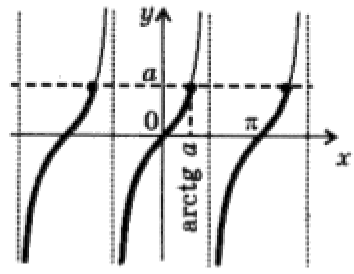
$$\operatorname{tg} x > a$$
$$\operatorname{arctg} a + \pi n < x < \pi/2 + \pi n,$$
$$n \in Z$$

$$\operatorname{tg} x \geq a$$
$$\operatorname{arctg} a + \pi n \leq x < \pi/2 + \pi n,$$
$$n \in Z$$



$$\operatorname{tg} x < a$$
$$-\pi/2 + \pi n < x < \operatorname{arctg} a + \pi n,$$
$$n \in Z$$

$$\operatorname{tg} x \leq a$$
$$-\pi/2 + \pi n < x \leq \operatorname{arctg} a + \pi n,$$
$$n \in Z$$



ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятия 11-12. Функции. Свойства функций

<u>*План*</u>

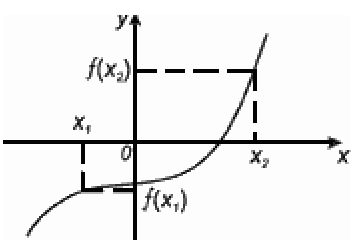
1. *Функции.*
2. *Область определения и множество значений; график функции, построение графиков функций, заданных различными способами.*
3. *Свойства функции: монотонность, четность, нечетность, периодичность.*
4. *Промежутки возрастания и убывания, наибольшее и наименьшее значения, точки экстремума.*

Определение : Числовой функцией называется соответствие, которое каждому числу x из некоторого заданного множества сопоставляет единственное число y.

Обозначение:

y = f(x),

где x – независимая переменная (аргумент), y – зависимая переменная (функция). Множество значений x называется областью определения функции (обозначается D(f)). Множество значений y называется областью значений функции (обозначается E(f)). Графиком функции называется множество точек плоскости с координатами (x, f(x))



Способы задания функции.

1. аналитический способ (с помощью математической формулы);
2. табличный способ (с помощью таблицы);

3. описательный способ (с помощью словесного описания);
4. графический способ (с помощью графика).

Основные свойства функции.

1. Четность и нечетность

Функция называется четной, если
– область определения функции симметрична относительно нуля
– для любого x из области определения *f(-x) = f(x)*

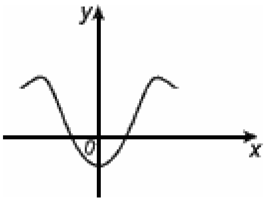


График четной функции симметричен относительно оси *0y*

Функция называется нечетной, если
– область определения функции симметрична относительно нуля
– для любого x из области определения *f(-x) = –f(x)*

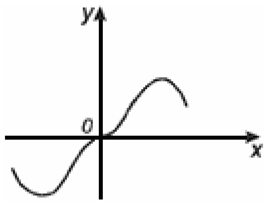


График нечетной функции симметричен относительно начала координат.

2.Периодичность

Функция f(x) называется периодической с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения *f(x) = f(x+T) = f(x-T)*.

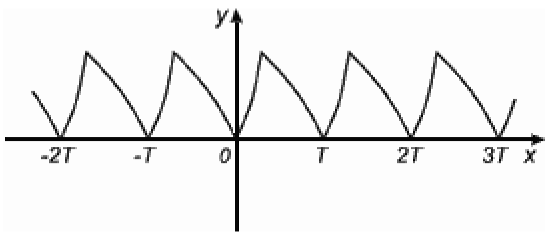
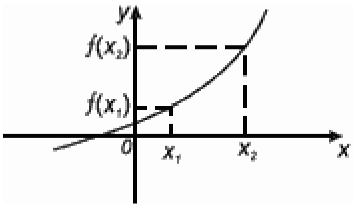


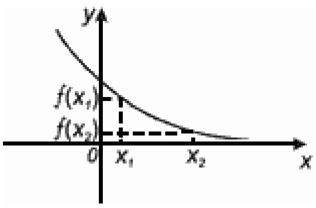
График периодической функции состоит из неограниченно повторяющихся одинаковых фрагментов.

3. Монотонность (возрастание, убывание)

Функция f(x) возрастает на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.



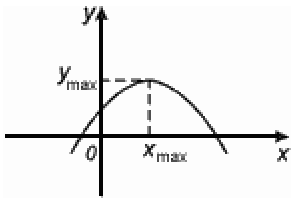
Функция f(x) убывает на множестве P , если для любых x_1 и x_2 из этого множества, таких, что $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.



4. Экстремумы

Точка X_{max} называется точкой максимума функции f(x) , если для всех x из некоторой окрестности X_{max} , выполнено неравенство $f(x) \leq f(X_{max})$.

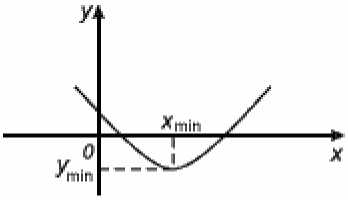
Значение $Y_{max}=f(X_{max})$ называется максимумом этой функции.



X_{max} – точка максимума $У_{max}$ – максимум

Точка X_{min} называется точкой минимума функции f(x) , если для всех x из некоторой окрестности X_{min} , выполнено неравенство $f(x) \geq f(X_{min})$.

Значение $Y_{min}=f(X_{min})$ называется минимумом этой функции.

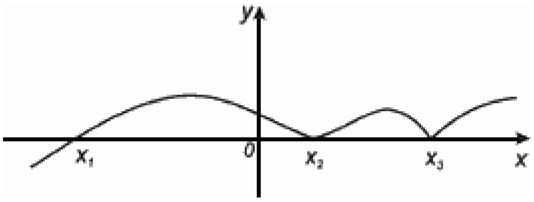


X_{min} – точка минимума Y_{min} – минимум

X_{min}, X_{max} – точки экстремума Y_{min}, $У_{max}$ – экстремумы.

5. Нули функции

Нулем функции y = f(x) называется такое значение аргумента x , при котором функция обращается в нуль: f(x) = 0.



X_1,X_2,X_3 – нули функции y = f(x).

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятия 13-14. Степенные, показательные, логарифмические функции и их свойства. Тригонометрические функции и их свойства.

План

1. Степенные функции и их свойства

2. Показательные функции и их свойства

3. Логарифмические функции и их свойства

4. Тригонометрические функции и их свойства

Пропорциональные величины. Если переменные y и x *прямо пропорциональны*, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением:

$$y = kx,$$

где k - постоянная величина (*коэффициент пропорциональности*). График *прямой пропорциональности* – прямая линия, проходящая через начало координат и образующая с осью X угол α, тангенс которого равен k : $\tan\alpha$ $= k$ (рис.8). Поэтому, коэффициентпропорциональности называется также *угловым коэффициентом*. На рис.8 показаны три графика для $k = 1/3$, $k = 1$ и $k = □3$.

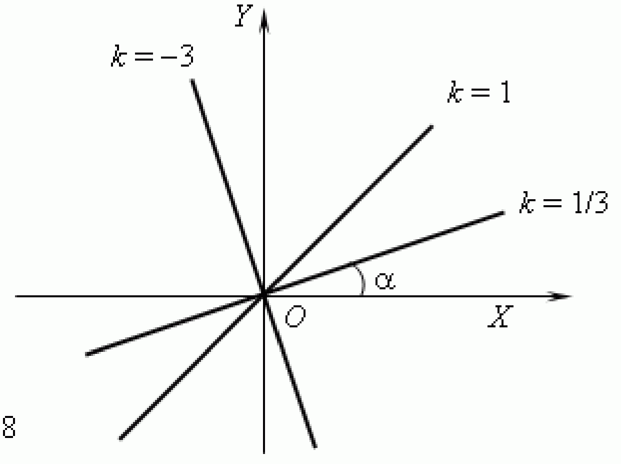


Рис.8

Линейная функция. Если переменные y и x связаны уравнением 1-ой степени:

$$A\,x + B\,y = C\,,$$

где по крайней мере одно из чисел A или B не равно нулю, то графиком этой функциональной зависимости является *прямая линия*. Если $C = 0$, то она проходит через начало координат, в противном случае - нет. Графики линейных функций для различных комбинаций A, B, C показаны на рис.9.

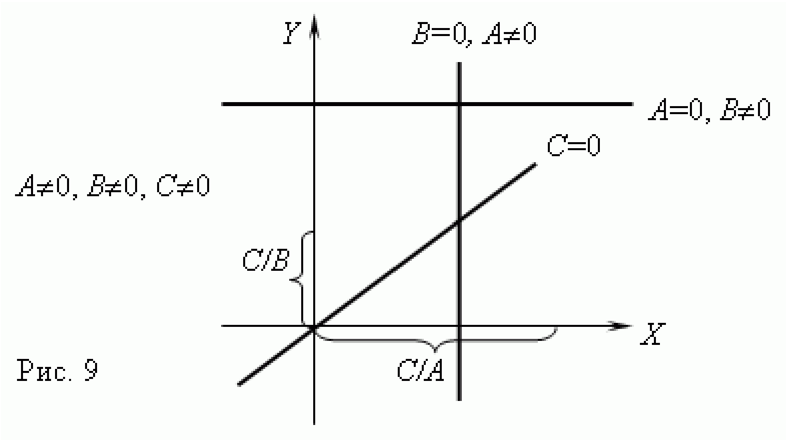


Рис. 9

Обратная пропорциональность. Если переменные y и x *обратно пропорциональны*, то функциональная зависимость между ними выражается уравнением:

$$y = k\,/\,x\,,$$

где k - постоянная величина.

График обратной пропорциональности – *гипербола* (рис.10). У этой кривой две ветви. Гиперболы получаются при пересечении кругового конуса плоскостью (о конических сечениях см.раздел «Конус» в главе «Стереометрия»). Как показано на рис.10, произведение координат точек гиперболы есть величина постоянная, в нашем примере равная 1. В общем случае эта величина равна k, что следует из уравнения гиперболы: $xy = k$.

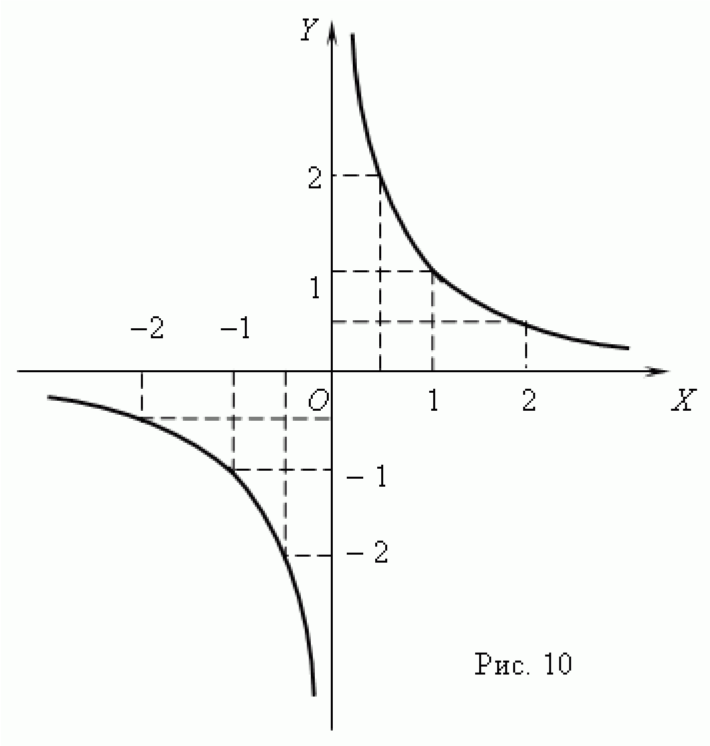


Рис. 10

Основные характеристики и свойства гиперболы:

- область определения функции: $x \neq 0$, область значений: $y \neq 0$;
- функция монотонная (убывающая) при $x < 0$ и при $x > 0$, но не монотонная в целом из-за точки разрыва $x = 0$ (подумайте, почему ?);
- функция неограниченная, разрывная в точке $x = 0$, нечётная, непериодическая;
- нулей функция не имеет.

Квадратичная функция. Это функция: $y = ax^2 + bx + c$, где a, b, c - постоянные, $a \neq 0$. В простейшем случае $b = c = 0$ и $y = ax^2$. График этой функции *квадратная парабола* - кривая, проходящая через начало координат (рис.11). Каждая парабола имеет ось симметрии OY, которая называется *осью параболы*. Точка O пересечения параболы с её осью называется *вершиной параболы*.

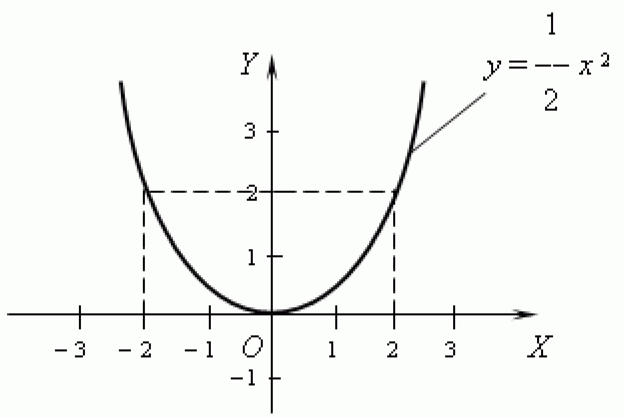


Рис. 11

График функции $y = ax^2 + bx + c$ - тоже квадратная парабола того же вида, что и $y = ax^2$, но её вершина лежит не в начале координат, а в точке с координатами:

$$\left(-\frac{b}{2a},\; c-\frac{b^2}{4a}\right).$$

Форма и расположение квадратной параболы в системе координат полностью зависит от двух параметров: коэффициента a при x^2 и *дискриминанта* $D = b^2 - 4ac$. Эти свойства следуют из анализа корней квадратного уравнения Все возможные различные случаи для квадратной параболы показаны на рис.12.

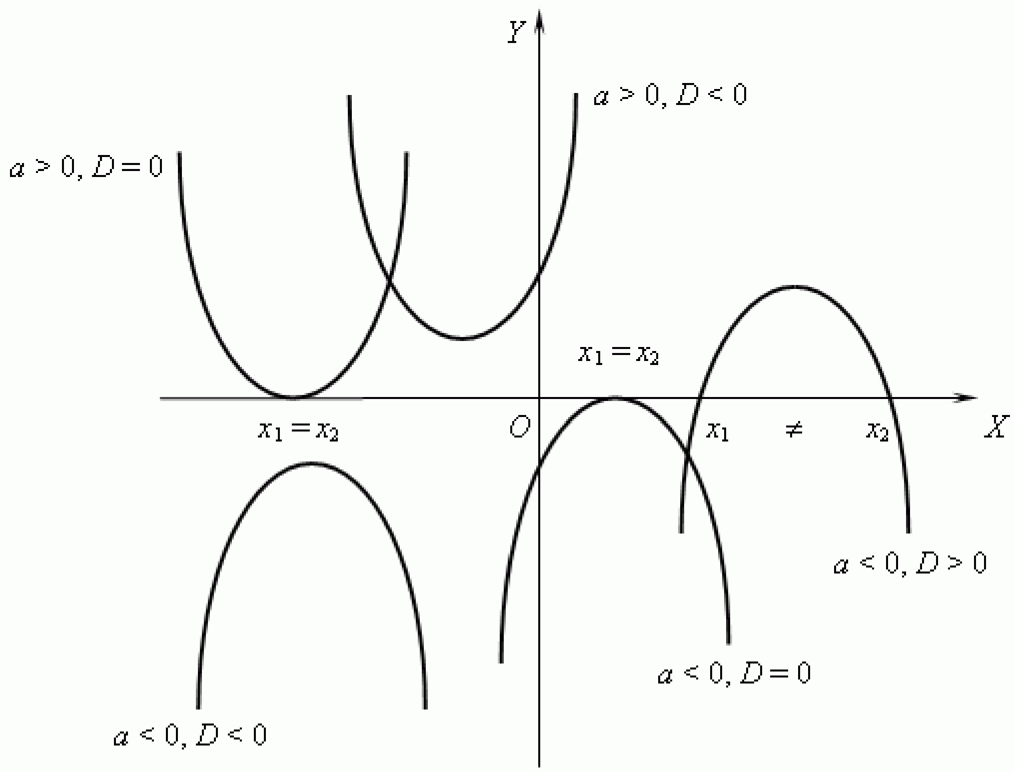


Рис. 12

Изобразите, пожалуйста, квадратную параболу для случая $a > 0, D > 0$.

Основные характеристики и свойства квадратной параболы:

- область определения функции: $-\infty < x < +\infty$ (т.е. $x \in \boldsymbol{R}$), а область
значений: ... (ответьте, пожалуйста, на этот вопрос сами !);
- функция в целом не монотонна, но справа или слева от вершины ведёт себя, как монотонная;
- функция неограниченная, всюду непрерывная, чётная при $b = c = 0$, и непериодическая;
- при $D < 0$ не имеет нулей. (А что при $D \geq 0$?) .

Степенная функция. Это функция: $y = ax^n$, где a, n – постоянные. . При $n = 1$ получаем *прямую пропорциональность*: $y = ax$; при $n = 2$ -

квадратную параболу; при n = □1 - *обратную пропорциональность* или *гиперболу*. Таким образом, эти функции - частные случаи степенной функции. Мы знаем, что нулевая степень любого числа, отличного от нуля, равна 1, следовательно, при $n = 0$ степенная функция превращается в постоянную величину: $y = a$, т.е. её график - прямая линия, параллельная оси X, исключая начало координат (поясните, пожалуйста, почему ?). Все эти случаи (при $a = 1$) показаны на рис.13 ($n \geq 0$) и рис.14 ($n < 0$). Отрицательные значения x здесь не рассматриваются, так как тогда некоторые функции: $y = x^{1/2} = \sqrt{x}$, $y = x^{1/4} = \sqrt[4]{x}$ теряют смысл.

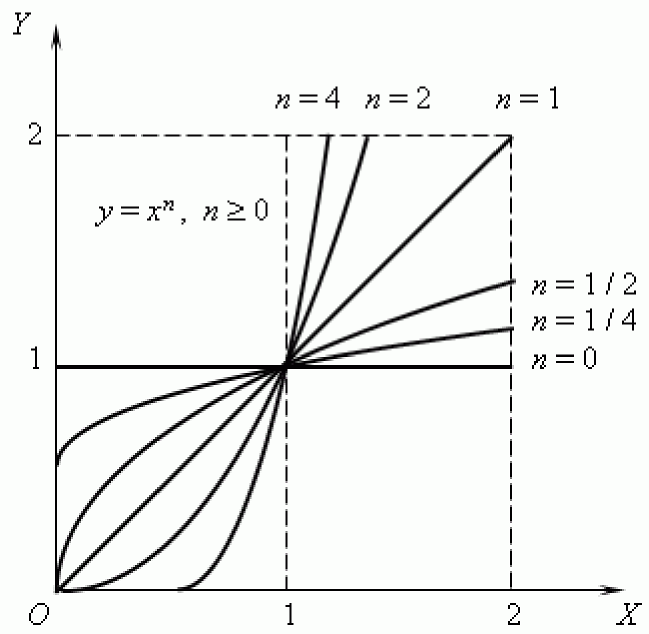


Рис. 13

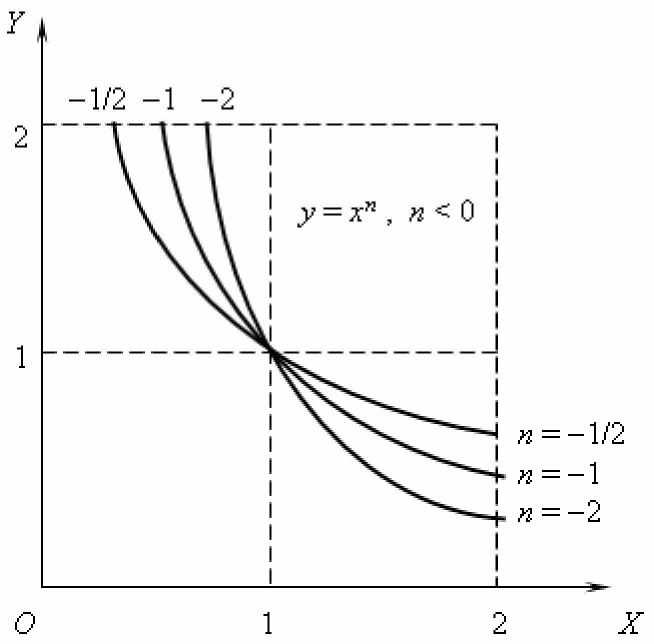


Рис. 14

Если n – целые, степенные функции имеют смысл и при $x < 0$, но их графики имеют различный вид в зависимости от того, является ли n чётным числом или нечётным. На рис.15 показаны две такие степенные функции: для $n = 2$ и $n = 3$.

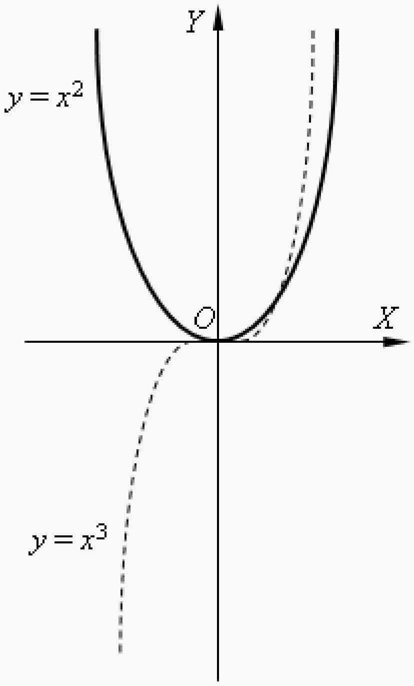


Рис. 15

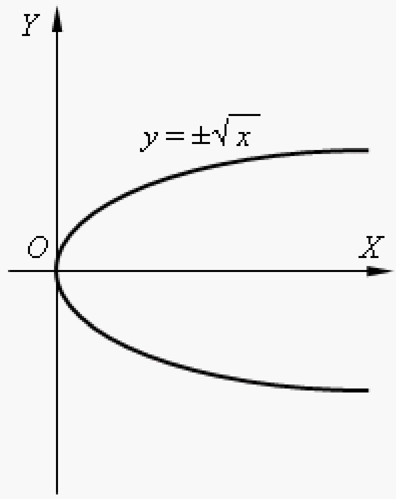


Рис.16

При $n = 2$ функция чётная и её график симметричен относительно оси Y. При $n = 3$ функция нечётная и её график симметричен относительно начала координат. Функция $y = x^3$ называется *кубической параболой*.

На рис.16 представлена функция $y = \pm\sqrt{x}$. Эта функция является обратной к квадратной параболе $y = x^2$, её график получается поворотом графика квадратной параболы вокруг биссектрисы 1-го координатного угла□ Это способ получения графика любой обратной функции из графика её исходной функции. Мы видим по графику, что это двузначная функция (об этом говорит и знак ± перед квадратным корнем). Такие функции не изучаются в элементарной математике, поэтому в качестве функции мы рассматриваем обычно одну из её ветвей: верхнюю или нижнюю.

Показательная функция. Функция $y = a^x$, где a - положительное

. постоянное число, называется *показательной функцией*. Аргумент x принимает *любые действительные значения*; в качестве значений функции рассматриваются *только положительные числа*, так как иначе мы имеем многозначную функцию. Так, функция $y = 81^x$ имеет при $x = 1/4$ четыре различных значения: $y = 3$, $y =$ □3, $y = 3\,i$ и $y =$ □$3i$ (проверьте, пожалуйста !). Но мы рассматриваем в качестве значения функции только $y = 3$. Графики показательной функции для $a = 2$ и $a = 1/2$ представлены на рис.17. Они проходят через точку (0, 1). При $a = 1$ мы имеем график прямой линии, параллельной оси X, т.е. функция превращается в постоянную величину, равную 1. При $a > 1$показательная функция возрастает, а при $0 < a < 1$ – убывает.

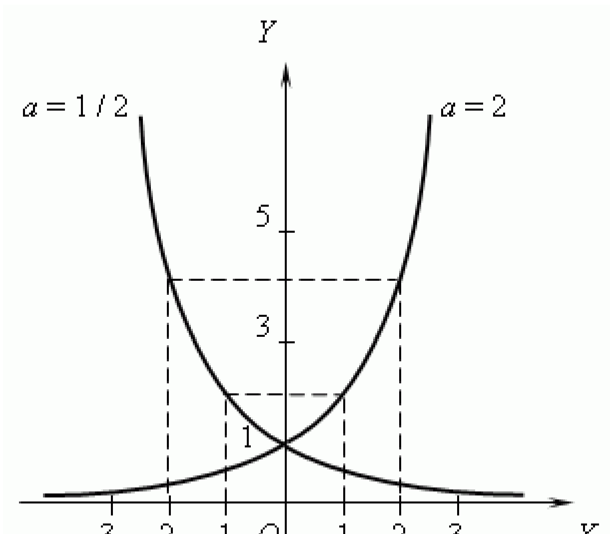


Рис. 17

Основные характеристики и свойства показательной функции:

- область определения функции: □□∞□< x□□□ -∞□(т.е. $x \in \boldsymbol{R}$);

  область значений: $y > 0$;

- функция монотонна: возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a <$

1;

- функция неограниченная, всюду непрерывная, непериодическая;
- нулей функция не имеет.

Логарифмическая функция. Функция $y = \log_a x$, где a – постоянное положительное число, не равное 1, называется *логарифмической*. Эта функция является обратной к показательной функции; её график (рис.18) может быть получен поворотом графика показательной функции вокруг биссектрисы 1-го координатного угла.

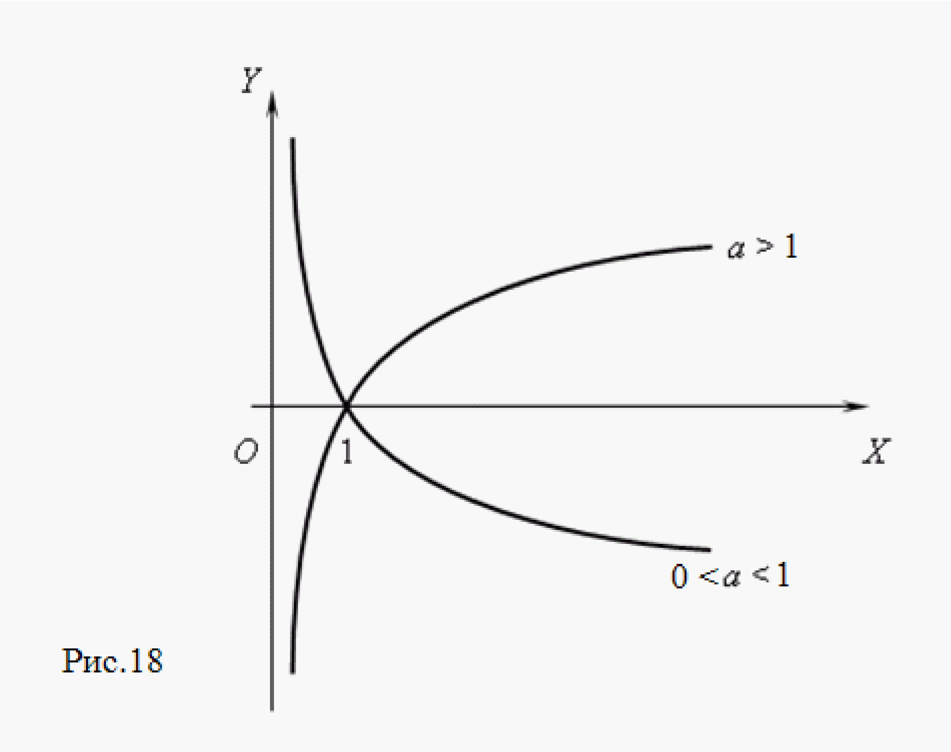


Рис.18

Основные характеристики и свойства логарифмической функции:

- область определения функции: $x > 0$, а область значений: $-\infty < y < +\infty$ (т.е. $y \in \boldsymbol{R}$);
- это монотонная функция: она возрастает при $a > 1$ и убывает при

$0 < a < 1$;

- функция неограниченная, всюду непрерывная, непериодическая;
- у функции есть один ноль: $x = 1$.

Тригонометрические функции. При построении тригонометрически

. функций мы используем *радианную* меру измерения

углов. Тогда функция $y = \sin x$ представляется графиком (рис.19). Э

кривая называется *синусоидой*.

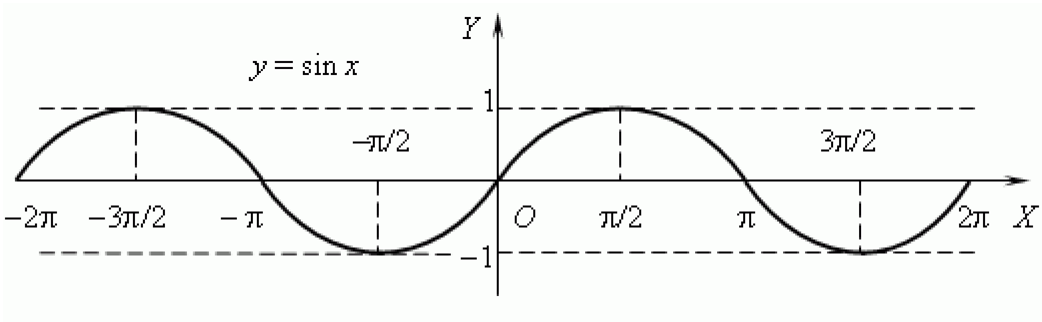


Рис. 19

График функции $y = \cos x$ представлен на рис.20; это также синусоида, полученная в результате перемещения графика $y = \sin x$ вдоль оси X влево на π□2□

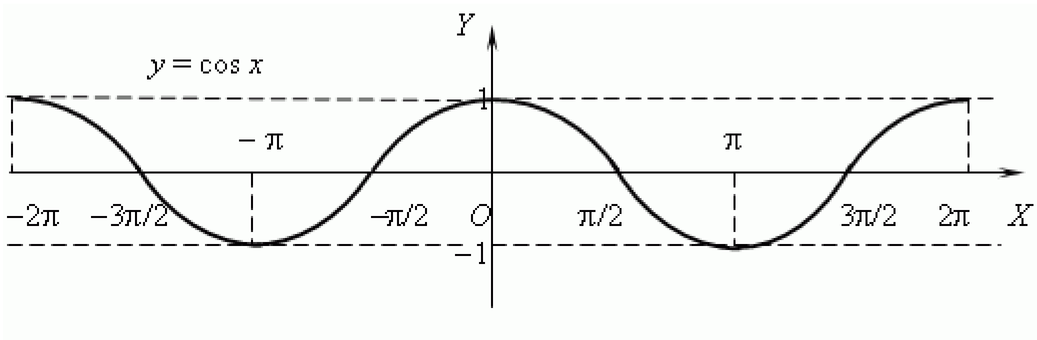


Рис. 20

Из этих графиков очевидны характеристики и свойства этих функций:

- область определения: □□∞□< x □□ +∞□□ область значений: □1≤ y ≤ +1;

имеющие так называемые *интервалы монотонности*, внутри которых он и ведут себя, как монотонные функции (см. графики рис.19 и рис.20);

- функции имеют бесчисленное множество нулей

Графики функций $y = \tan x$ и $y = \cot x$ показаны соответственно на рис.21 и рис.22

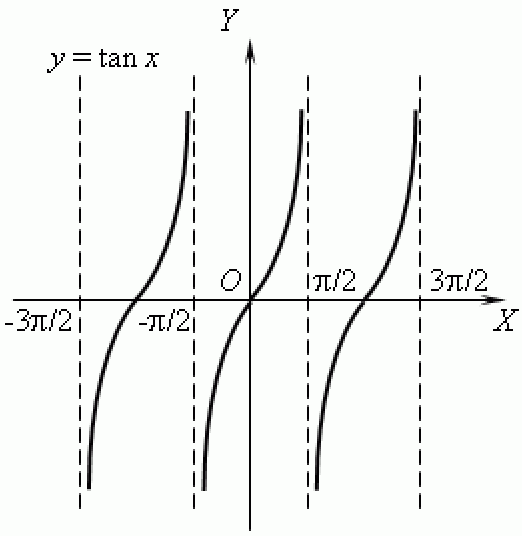


Рис. 21

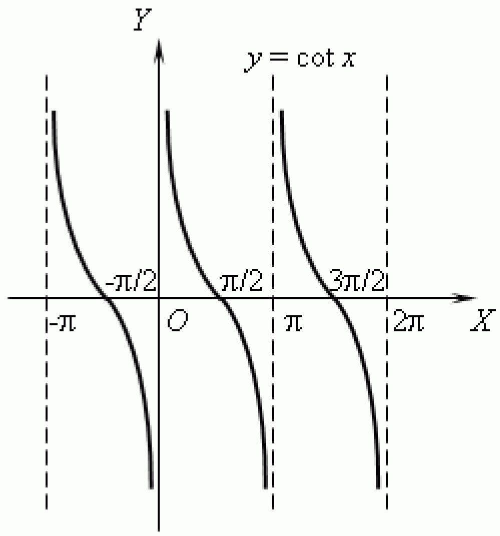


Рис. 22

Из графиков видно, что эти функции: периодические (их период π), ограниченные, в целом не монотонные, но имеют интервалы нотонности (какие?), разрывные (какие точки разрыва имеют эти нкции?).

Область определения и область значений этих функций:

для $y = \tan x$: $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $-\infty < y < +\infty$;

для $y = \cot x$: $x \neq \pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $-\infty < y < +\infty$.

Обратные тригонометрические функции.

.

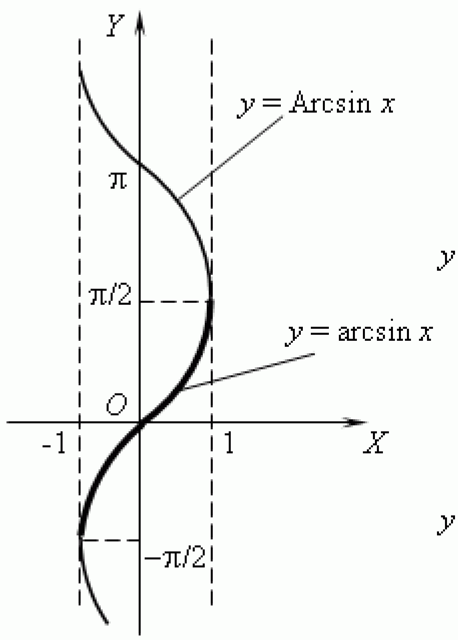


Рис. 23

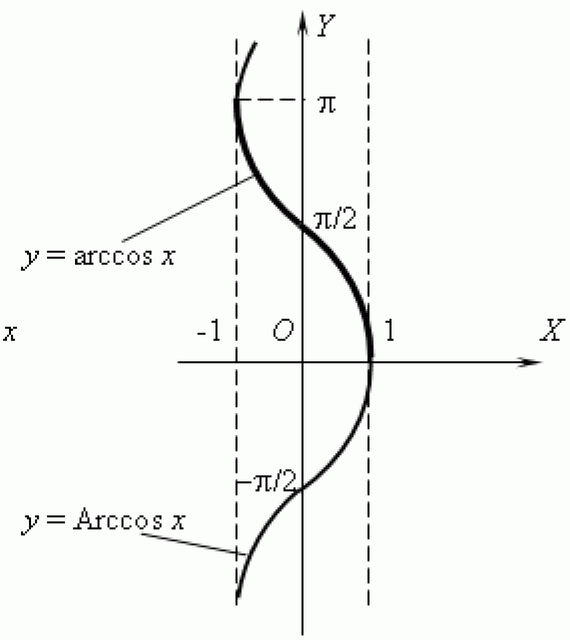


Рис. 24

Функции $y = \text{Arcsin}\, x$ (рис.23) и $y = \text{Arccos}\, x$ (рис.24) многозначные, неограниченные Поскольку эти функции многозначные, не рассматриваемые в элементарной математике, в качестве обратных тригонометрических функций рассматриваются их главные значения: $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$; их графики выделены на рис.23 и рис.24 жирными линиями.

Функции $y = \arcsin x$ и $y = \arccos x$ обладают следующими характеристиками и свойствами:

- у обеих функций одна и та же область определения: $-1 \le x \le +1$;

их области значений: $-\pi/2 \le y \le \pi/2$ для $y = \arcsin x$ и $0 \le y \le \pi$ для $y = \arccos x$;

- функции ограниченные, непериодические, непрерывные и монотонные

($y = \arcsin x$ – возрастающая функция; $y = \arccos x$ – убывающая);

- каждая функция имеет по одному нулю ($x = 0$ у функции $y = \arcsin x$ и

$x = 1$ у функции $y = \arccos x$).

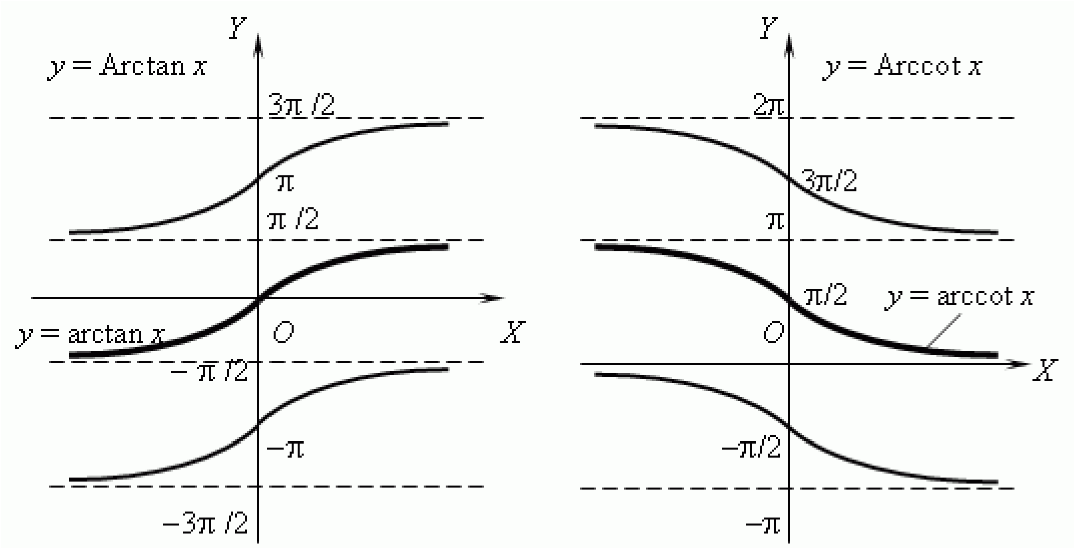


Рис. 25 Рис. 26

Функции $y = \mathrm{Arctan}\, x$ (рис.25) и $y = \mathrm{Arccot}\, x$ (рис.26) - многозначные, неограниченные; их область определения: $-\infty \le x \le +\infty$. Их главные значения $y = \arctan x$ и $y = \mathrm{arccot}\, x$ рассматриваются в качестве обратных тригонометрических функций; их графики выделены на рис.25 и рис.26 жирными ветвями.

Функции $y = \arctan x$ и $y = \mathrm{arccot}\, x$ имеют следующие характеристики и свойства:

- у обеих функций одна и та же область определения: $-\infty \le x \le +\infty$;

их области значений: $-\pi/2 < y < \pi/2$ для $y = \arctan x$ и $0 < y < \pi$ для $y = \arccos x$;

- функции ограниченные, непериодические, непрерывные и монотонные

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятия 15-17. Производная функции, её геометрический и физический смысл. Теоремы о дифференцировании

План

1. *Производная.*
2. *Понятие о производной функции, её геометрический и физический смысл.*
3. *Производные суммы, разности, произведения, частного.*
4. *Производные основных элементарных функций.*

Определение: Производной функции f(x) ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования.

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

$$1)\ (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$2)\ (cf(x))' = c \cdot f'(x),\ \text{где } c - const$$

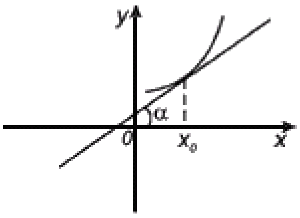
$$3)\ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$4)\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

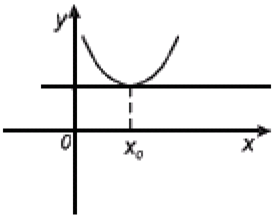
Производная сложной функции:

$h(x) = g(f(x))$ - сложная функция
$h'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x).$

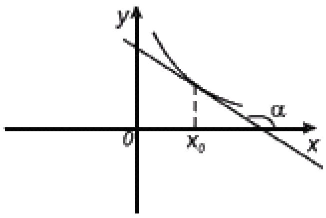
Геометрический смысл производной. Производная в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции $y=f(x)$ в этой точке



$$f'(x_0) = tg\alpha > 0$$



$$f'(x_0) = tg\alpha = 0$$



$$f'(x_0) = tg\alpha < 0$$

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0 :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Физический смысл производной.

Если точка движется вдоль оси x и ее координата изменяется по закону x(t), то мгновенная скорость точки $v(t) = x'(t)$.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 18. Применение производной к исследованию функций и построению графиков.

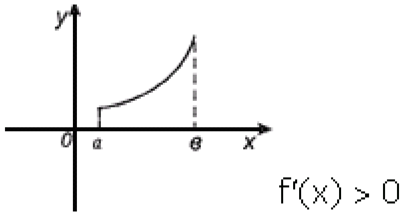
<u>*План*</u>

1. Исследование функции на монотонность

2. Исследование функции на экстремумы.

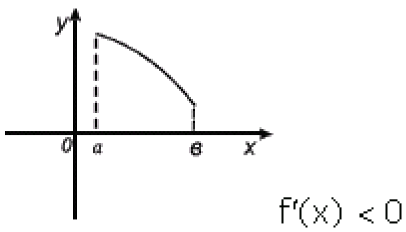
3. Полная схема исследования функции.

Достаточное условие возрастания функции



Если в каждой точке интервала (a, b) f'(x)>0, то функция f(x) возрастает на этом интервале.

Достаточное условие убывания функции.



Если в каждой точке интервала (a, b) f'(x)<0, то функция f(x) убывает на этом интервале.

Определение:

x_0 называется критической точкой функции f(x), если

1) x_0 – внутренняя точка области определения f(x) ;

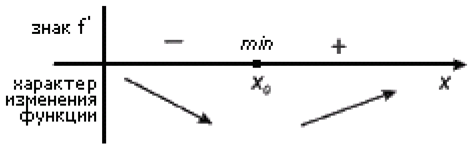
2) $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

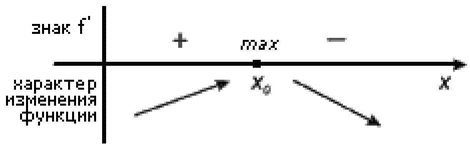
Необходимое условие экстремума:

Если x_0– точка экстремума функции $f(x)$, то эта точка является критической точкой данной функции.

Достаточное условие экстремума:

Если при переходе через точку x_0 производная функции меняет знак, то x_0 – точка экстремума функции $f(x)$.





Примеры экстремумов:

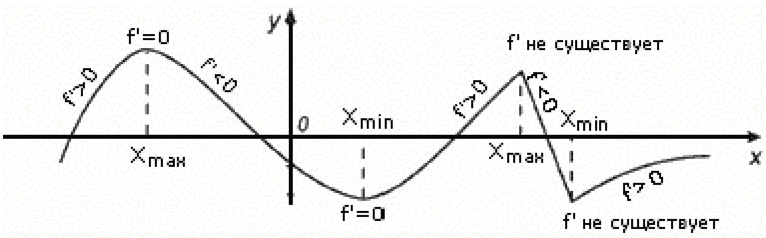


Схема исследования функции.

1. Найти область определения функции.
2. Проверить, не является ли функция четной или нечетной; проверить также, не является ли она периодической.
3. Найти, если это возможно, точки пересечения графика функции с осями координат и промежутки знакопостоянства функции. Иногда для уточнения построения графика следует найти две три дополнительные точки.
4. Найти производную функции и ее критические точки.

5. Найти промежутки монотонности и экстремумы функции.
6. Построить график функции, используя полученные результаты исследования.

Схема нахождения наибольшего и наименьшего значений функции f(x), непрерывной на отрезке [a; b].

1. Найти значения функции в концах отрезка, т.е. f(a) и f(b) ;
2. Найти значения функции в тех критических точках, которые принадлежат интервалу (a,b) ;
3. Из найденных значений выбрать наибольшее и наименьшее.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятия 19-20. Первообразная и интеграл. Правила интегрирования

<u>План</u>

1. Первообразная функции

2. Неопределенный интеграл

3. Таблица интегралов

4. Теоремы об интегрировании.

Определение. Функция F (x) называется первообразной для функции f (x) на данном промежутке, если для любого x из данного промежутка F'(x)= f (x).

Основное свойство первообразных.

Если F (x) – первообразная функции f (x), то и функция F (x)+ C , где C –произвольная постоянная, также является первообразной функции f (x) (т.е. все первообразные функции f(x) записываются в виде F(x) + C).

Геометрическая интерпретация.

Графики всех первообразных данной функции f (x) получаются из графика какой-либо одной первообразной параллельными переносами вдоль оси Oy.

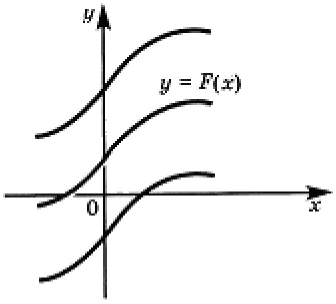


Таблица первообразных.

Функция	k (постоянная)	x^p, $p \neq -1$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x	$\sin x$	$\cos x$
Первообразная	$kx + C$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$e^x + c$	$\frac{a^x}{\ln a} + c$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$

Правила нахождения первообразных .

Пусть F(x) и G(x) – первообразные соответственно функций f(x) и g(x). Тогда:

1. $F(x) \pm G(x)$ – первообразная для $f(x) \pm g(x)$;

2. $a F(x)$ – первообразная для $a f(x)$;

3. $\frac{1}{k} F(kx+b)$ – первообразная для $a f(kx + b)$.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 21. Формула Ньютона—Лейбница. Площадь криволинейной трапеции

План

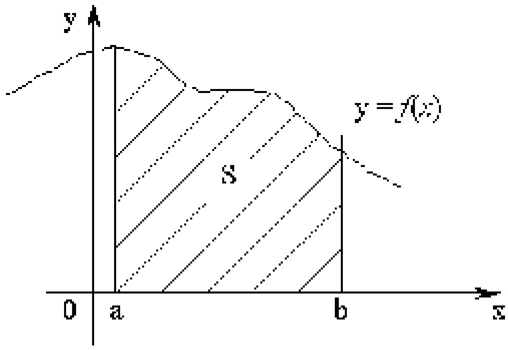
1. Определенный интеграл.

2. Формула Ньютона-Лейбница

3. Площадь криволинейной трапеции

Определение. Разность F (b)– F (a) называется интегралом от функции f (x) на отрезке [a ; b] и обозначается так: $\int_a^b f(x)dx$, т.е. $\int_a^b f(x)dx$ = F (b)– F (a) – формула Ньютона-Лейбница.

Геометрический смысл интеграла.

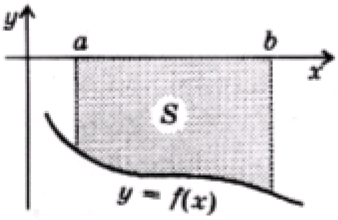


Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной положительной на промежутке [a ; b] функции f (x), осью Ox и прямыми x=a и x= b:

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(a) - F(b).$$

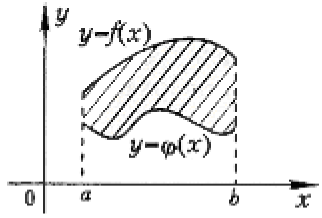
Вычисление площадей с помощью интеграла.

1.Площадь фигуры, ограниченной графиком непрерывной отрицательной на промежутке [a ; b] функции f (x), осью Ox и прямыми x=a и x= b :

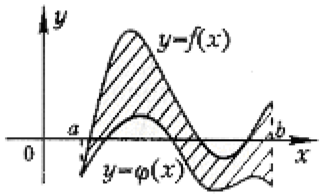


$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

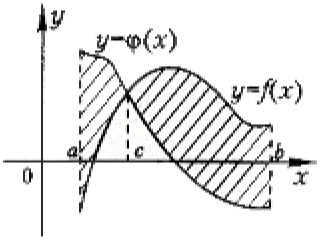
2.Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций f (x), $\varphi(x)$ и прямыми x=a, x= b :



$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))\,dx;$$

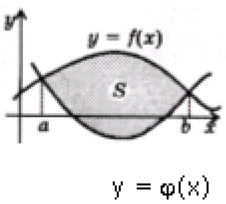


$$S = \int_a^b (f(x) - \varphi(x))\,dx;$$



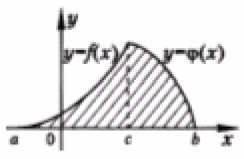
$$S = \int_a^c (\varphi(x) - f(x))\,dx + \int_c^b (f(x) - \varphi(x))\,dx;$$

3.Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций f (x) и $\varphi(x)$:



$$S = \int_a^b (f(x) - \quad (x))dx$$

4.Площадь фигуры, ограниченной графиками непрерывных функций f (x), $\varphi(x)$ и осью Ox:



$$S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b \varphi(x)\,dx.$$

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятия 22-23. Рациональные, иррациональные уравнения. Показательные уравнения

<u>*План*</u>

1. Равносильные уравнения.

2. Этапы решения уравнений.

3. Теориме о равносильности

Определение 1.

Два уравнения с одной переменной $f(x)=g(x)$ **и** $p(x)=h(x)$ **называют равносильными, если множества их корней совпадают.**

Иными словами,

два уравнения называют *равносильными,* если они имеют одинаковые корни или если оба уравнения не имеют корней.

Определение 2.

Если каждый корень уравнения $f(x)=g(x)$ (1)

является в то же время корнем уравнения $p(x)=h(x)$**,** (2)

то уравнение (2) **называют следствием уравнения** (1)**.**

Пример:

Уравнение $(x-2)2=9$ *является следствием уравнения* $x-2=3$.

В самом деле, решив каждое уравнение, получим:

$(x-2)2=9x-2=3;x-2=-3x1=5;x2=-1$ и $x-2=3x=5$

Корень второго уравнения является одним из корней первого уравнения, поэтому первое уравнение — следствие второго уравнения.

Очевидно следующее утверждение:

Два уравнения равносильны тогда и только тогда, когда каждое из них является следствием другого.

Решение уравнения, как правило, осуществляется в три этапа:

Первый этап — *технический.*

На этом этапе осуществляют преобразования по схеме (1)→(2)→(3)→(4)→... и находят корни последнего (самого простого) уравнения указанной цепочки.

Второй этап — *анализ решения.*

На этом этапе анализируем, все ли проведённые преобразования были равносильными.

Третий этап — *проверка.*

Если анализируя преобразования на втором этапе, делаем вывод, что получили уравнение-следствие, то обязательна проверка всех найденных корней их подстановкой в исходное уравнение.

Обрати внимание!

Решение уравнений, встречающихся в школьном курсе, основано на шести теоремах о равносильности.

Теорема 1.

Если какой-либо член уравнения перенести из одной части уравнения в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 2.

Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечётную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3.

Показательное уравнение af(x)=ag(x), где a>0, a≠1 равносильно уравнению f(x)=g(x).

Определение 3.

Областью определения уравнения f(x)=g(x) **или областью допустимых значений переменной (ОДЗ) называют множество тех значений переменной** x**, при которых одновременно имеют смысл выражения** f(x) **и** g(x)**.**

Теорема 4.

Если обе части уравнения f(x)=g(x) умножить на одно и то же выражение h(x), которое:

а) имеет смысл всюду в области определения (в области допустимых значений) уравнения f(x)=g(x);

б) нигде в этой области не обращается в 0,

то получится уравнение f(x)·h(x)=g(x)·h(x), равносильное данному.

Следствие теоремы 4.

Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 5.

Если обе части уравнения f(x)=g(x) неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же чётную степень nполучится уравнение, равносильное данному:f(x)n=g(x)n

Теорема 6.

Если f(x)>0 и g(x)>0, то логарифмическое уравнение logaf(x)=logag(x), где a>0, a≠1, равносильно уравнению f(x)=g(x)

В ходе решения уравнений, выполняя различные преобразования, может получиться уравнение-следствие. Это может произойти, если применить одну из теорем 4, 5 или 6, не проверив выполнения ограничений, заложенных в формулировке теоремы.

Пример:

Возведём в квадрат обе части уравнения x−1=3.

Получим уравнение, решив которое, имеем в ответе два корня:

(x−1)2=9x1=4,x2=−2

Второй корень −2 является посторонним корнем уравнения x−1=3.

Причина его появления в том, что по теореме 5 обе части уравнения при возведении его в одну и ту же чётную степень, должны быть неотрицательны. Но относительно выражения x−1 утверждать этого нельзя.

В ходе решения уравнений может произойти расширение области определения уравнения, если:

1) происходит освобождение от знаменателей, содержащих переменную;

2) происходит освобождение от знаков корней чётной степени;

3) происходит освобождение от знаков логарифмов.

Обрати внимание!

При преобразовании исходного уравнения в уравнение-следствие, **обязательна проверка всех найденных корней, чтобы выявить посторонний корень**.

Проверка необходима, если:

1) произошло расширение области определения уравнения;

2) осуществлялось возведение обеих частей уравнения в одну и ту же чётную степень;

3) выполнялось умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной (имеющее смысл во всей области определения уравнения).

При решении уравнений, заменяя одно уравнение другим, может как появиться посторонний корень, так и потеряться какой-то корень.

Потеря корня может произойти, если:

1) разделить обе части уравнения на одно и то же выражение h(x) (кроме тех случаев, когда точно известно, что всюду в области определения уравнения выполняется условие h(x)≠0);

2) сужение ОДЗ в процессе решения уравнения.

Пример:

Реши уравнение

lgx2=4

Решим уравнение двумя способами:

x2=104;2lgx=4;x2=10000;lgx=2;x1=100,x=100x2=−100

Сравнивая этих два способа, замечаем, что при решении вторым способом «потерялся» корень x=−100.

Причина здесь — в неправильном применении формулы, которая сузила область определения выражения, т.е. вместо правильной формулы

lgx2=2lg||x|| (где область определения x — любое число, кроме 0), мы воспользовались неправильной формулой lgx2=2lgx, где область определения x>0, т.е. только положительные числа. Из области определения «выпал» открытый луч (−∞;0), где как раз и находится «потерявшийся» при втором способе решения корень уравнения.

Поэтому, применяя при решении уравнения какую-либо формулу, необходимо, чтобы в правой и левой части формулы, ОДЗ переменной были бы одинаковыми.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 24. Основные понятия комбинаторики. Задачи на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.

<u>План</u>

1. Размещения.

2. Перестановки.

3. Комбинации (сочетания)

*Группы, составленные из данных предметов и отличающиеся друг от друга числом предметов, самими предметами или их порядком, называются **соединениями**.*

<u>Например.</u>

1, 2, 3 – элементы

1, 2, 3 – самими цифрами

12, 13, 21, 23, 31, 32 – хотя бы одной цифрой или порядком

123, 132, 213, 231, 312, 321 – порядком

Количество всех элементов – n.

Количество элементов в каждом соединении – m.

*Соединения, составленные из n данных элементов по m в каждом, называются **размещениями**, если они отличаются друг от друга элементами или их порядком или и тем и другим вместе.*

Число размещений равно произведению множителей, число которых равно верхнему указателю (m), наибольший множитель равен числу всех элементов (n), каждый последующий множитель на единицу меньше предыдущему. Последний множитель равен разности между верхним и нижнем указателем плюс 1.

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1)$$

*Произведение натуральных чисел от 1 до данного натурального числа n называется **факториалом** числа n и обозначается n!*

								7	*8*	*9*	*1 0*
!				*4*	*20*	*20*	*5 040*	*4 0320*	*3 62780*	*3 628800*

***Перестановками** называются такие соединения, в каждое из которых входят все m и поэтому они отличаются только порядком соединений.*

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)n = n!$$

*Соединения, из n элементов по m элементов в каждом, называются **сочетаниями**, если они отличаются только элементами, хотя бы одним.*

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}$$

Также число сочетаний можно вычислить по формуле:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}$$

Формулы размещений и сочетаний через перестановки

$$A_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m}}$$

$$C_n^m = \frac{P_n}{P_{n-m} \cdot P_m}$$

Свойствасочетаний.

1. C_n^m=C_n^{n-m}
2. $C_n^m + C_n^{m-1} = C_{n+1}^m$
3. $C_n^n = C_n^0 = C_n^1 = 1$

<u>Практикум по решению задач.</u>

ПЕРЕСТАНОВКИ

1. Вычислить:
   а) 8!+9!=403200
   б) 9!-8!=322560
   в) $\frac{100!}{99!} = 100$
   г) $\frac{6!-5!}{120} =$

2. Сколькими способами можно составить список из 9 фамилий?

<u>Решение.</u>

P_9=9!=362880

3. Сколькими способами можно разложить 8 разных писем по 8 разным конвертам, если в каждый конверт кладется лишь одно письмо?

<u>Решение.</u>

P_8=8!=40320

4. Сколько пятизначных чисел можно записать цифрами 5, 6, 7, 8 и 9 так, чтобы все цифры были разными?

Решение.

$P_5=5!=120$

5. Из цифр 0, 1, 2, 3 и 4 составлены все возможные пятизначные числа так, чтобы в каждом числе цифры не повторялись. Сколько получилось чисел?

Решение.

$P_5-P_4=5!-4!=96$

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составлены все возможные пятизначные числа без повторения цифр. Сколько среди этих чисел таких, что:

а) Начинаются с цифры 5;

б) Не начинаются с цифры 3;

в) Начинаются с 53;

г) Не начинаются с 543?

Решение.

а) $P_4=24$

б) $P_5-P_4=5!-4!=96$

в) $P_3=3!=6$

г) $P_5-P_2=5!-2!=118$

7. На карточках написаны буквы «П», «О», «Р», «Т». Сколько можно сделать перестановок из этих карточек?

Решение.

$P_4=24$

8. Вычислить:

$$\frac{P_8 - P_7}{7P_7} = 1$$

РАЗМЕЩЕНИЯ

1. Вычислить:

а) $A_6^3 = 6 \cdot (6-1) \cdot (6-2) = 120$

б) $A_9^2 = 9 \cdot (9-1) = 72$

в) $A_{10}^4 = 10 \cdot (10-1) \cdot (10-2) \cdot (10-3) = 5040$

г) $A_6^5 = 6 \cdot (6-1) \cdot (6-2) \cdot (6-3) \cdot (6-4) = 720$

2. Сколькими способами можно рассадить 4 человек на 25 местах?

Решение.

$A_{25}^4 = 303600$

3. Студенту нужно сдать 4 экзамена в течение 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

$A_8^4 = 1680$

4. Сколько существует всего семизначных телефонных номеров, в которых ни одна цифра не повторяется?

Решение.

$A_{10}^7 = 604800$

5. Сколько существует двузначных чисел, в которых число десятков и число единиц различны и являются нечетными числами?

Решение.

$A_5^2 = 20$

6. Из скольких различных предметов можно составить 210 разных размещений по 2 элемента в каждом?

Решение.

$A_x^2 = 210$

$x \cdot (x-1) = 210$

$x^2 - x - 210 = 0$

$x_1 = 15 \qquad x_2 = -14$

7. Найти *n*, если$A_n^5 = 18 \cdot A_{n-2}^4$

Ответ: 9 или 10.

8. Решить уравнения.

а) $A_x^2 = 90$

б) $A_x^2 = 42$

в) $A_x^3 = 56x$

Ответ: а) 10, б) 7, в) 9.

9. Расписание на день содержит 7 уроков. Определить количество вариантов возможного расписания, при условии, что ни один из 11 предметов не встречается в нем дважды.

Решение.

$A_{11}^7 = 16663200$

10. Комиссия состоит из председателя, заместителя и еще 5 человек. Сколькими способами 7 членов комиссии могут распределить мепжду собой обязанности?

Решение.

$A_7^2 = 42$

СОЧЕТАНИЯ

1. Вычислить:

а) $C_{10}^{3} = \frac{10\cdot9\cdot8}{1\cdot2\cdot3} = 120$

б) $C_{60}^{49} = \frac{50!}{49!(50-49)!} = 50$

2. Сколькими способами можно из 25 студентов выбрать 3 дежурных?

Решение.

$$C_{25}^{3} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 2300$$

3. Вычислить:

а) $C_{8}^{2} = 28$

б) $C_{8}^{6} = 28$

в) $C_{5}^{4} + C_{3}^{0} = 6$

г) $C_{100}^{100} + C_{100}^{1} = 101$

4. Из 20 сотрудников нужно выбрать 6 для выполнения задания. Сколькими способами это можно сделать?

Решение.

$C_{20}^{6} = 38760$

5. На полке есть 35 книг. Сколькими способами можно выбрать две из них?

Решение.

$C_{35}^{2} = 595$

6. Сколькими способами можно зачеркнуть 6 номеров из 49 на карточке «Спортлото»?

Решение.

$C_{49}^{6} = 13983816$

7. Решить уравнения:

а) $C_x^2 = 21$

б) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$

в) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$

г) $C_{x-1}^3 + C_{x-1}^2 = 15(x-2)$

Ответы: а) 7; б) 9; в) 14; г) 10.

8. В лотерее разыгрывается 5 предметов. Первый, кто подходит к урне вынимает из нее 5 билетов. Каким числом способов он может их вынуть, чтобы 3 из них оказались выигрышными, если в урне 100 билетов?

Решение.

$C_5^3 \cdot C_{95}^2 = 44650$

9. Собрание, на котором присутствовали 30 человек, в том числе 2 женщины, избрало 4 сотрудников для работы на избирательном участке. Сколько может быть случаев, когда в число избранных войдут обе женщины?

Решение.

$C_{30}^2 = 435$

10. Шестнадцать экскурсантов разделились на 2 равные группы для поиска заблудившегося товарища. Среди них есть только 4 человека, знакомые с местностью. Каким числом способов они могут разделиться так, чтобы в каждую группу вошли два человека, знающие местность.

Решение.

$$\frac{C_4^2 \cdot C_{12}^6}{P_2} = 2772$$

11. Строительная организация выделила в помощь подшефному детскому саду бригаду из 5 человек. Организация насчитывает 20 рабочих, в том числе 5 маляров, 4 столяра и 2 штукатура. Каким числом способов можно укомплектовать бригаду, чтобы она состояла из рабочих всех этих специальностей по одному?

Решение.

$$C_5^1 \cdot C_4^1 \cdot C_2^1 \cdot C_9^2 = 1440$$

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятия 25- 27. Событие, вероятность события, сложение и умножение вероятностей

<u>Введение.</u>

Везде можно обнаружить случайности. Будь то лотерея или прогноз погоды. Мир – это бесконечное многообразие явлений, которые можно разделить на закономерные и случайные. Случайные явления в обыденном представлении кажутся нам крайне редкими, не имеющими закономерностей; они как бы нарушают естественный ход событий. Однако при проведении многочисленных экспериментов можно убедиться, что случай тоже имеет свои законы. Их изучает специальный раздел математики – теория вероятностей. *Философы говорят: «путь, которым необходимость идет к цели, вымощен бесконечным множеством случайностей».*

Теория вероятностей *- раздел математики, изучающий закономерности случайных явлений: случайные события, случайные величины, их свойства и операции над ними.*

Первичным понятием теории вероятности является понятие события.

Событие - *это явление, о котором можно сказать, что оно происходит или не происходит при определенных условиях.*

События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C ... Любое событие происходит вследствие испытания (эксперимента, опыта).

Испытания - *это условия, в результате которых происходит или не происходит событие.*

<u>Например:</u>

- Испытание - подбрасывание монеты. События: A – {появление герба}, B – {появление решки}

- Испытание - подбрасывание игрального кубика, события: A - {появление 1 очка}, B - {появление 2 очков}, C - {появление 3 очков}, D - {появление 4 очков}, E - {появление 5 очков}, F - {появление 6 очков}.

<u>Типы событий</u>

***Случайным** - называется событие, которое может произойти или не произойти при осуществлении определенного испытания.*

Например:

• Во время вытягивания наугад одной карты из колоды вы взяли короля. Событие А – {взят короля} является случайной.

Случайные события могут быть массовыми и единичными.

Массовыми называют однородные события, наблюдаемые при определенных условиях, которые могут быть воспроизведены неограниченное количество раз.

Например:

- Испытание - подбрасывание монеты, события: А – {появление герба}, В – {появление решки}.

Примером единичной случайного события является падение Тунгусского метеорита.

Теория вероятностей изучает массовые случайные события!

*Событие называется **достоверным**, если оно обязательно произойдет в результате данного испытания.*

Например:

- Событие А – {появление на одной из граней игрального кубика натурального числа меньшего по 7} - является достоверным.

*Событие называется **невозможным**, если оно не может произойти в результате данного испытания.*

Например:

- Событие А – {появление на одной из граней игрального кубика цифры 7} - является невозможным.

Примеры событий

ДОСТОВЕРНОЕ:

1. после зимы наступает весна.

2. после ночи приходит утро.

3. камень падает вниз.

СЛУЧАЙНОЕ:

1. *найти клад.*

2. бутерброд падает маслом вниз.

3. в доме живет кошка.

НЕВОЗМОЖНОЕ:

1. *30 февраля день рождения.*

2. при подбрасывании кубика выпадает 7 очков.

<u>Выполнение устного задания</u>

№1.

Охарактеризуйте события, о которых идет речь в приведенных заданиях как достоверные, невозможные или случайные.

Задумано натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) задумано четное число;

б) задумано нечетное число;

в) задумано число, не являющееся ни четным, ни нечетным;

г) задумано число, являющееся четным или нечетным.

№2.

В мешках лежит 10 шаров: 3 синих, 3 белых и 4 красных. Охарактеризуйте следующее событие:

а) из мешка вынули 4 шара и они все синие;

б) из мешка вынули 4 шара и они все красные;

в) из мешка вынули 4 шара, и все они оказались разного цвета;

г) из мешка вынули 4 шара, и среди них не оказалось шара черного цвета.

<u>Полная группа событий</u>

***Полной группой** событий называется множество таких событий, что в результате каждого испытания обязательно должно произойти хотя бы одно из них.*

Например:

- В испытании - подбрасывание игрального кубика, полную группу событий составляют события: А1 – {появление 1 очка}, А2 – {появление 2 очков}, А3 – {появление 3 очков}, А4 – {появление 4 очков}, А5 – {появление 5 очков}, А6 –{появление 6 очков}.

Или

- В1 – {появление четного числа}, В1-{появление нечетного числа}.

Попарно несовместимые события

***Попарно несовместимые события** - это события, два из которых не могут происходить одновременно.*

Например:

- Попадание и промах при одном выстреле.
- Появление цифры 1, 2, 3, 4, 5 и 6 при одном бросании игрального кубика.

Равновозможные события

***Равновозможные события** - это такие события, каждое из которых не имеет никаких преимуществ в появлении чаще других во время многократных испытаний, проводимых при одинаковых условиях.*

Например:

- Испытания - подбрасывание монеты, события: А1 – {появление герба}, А2 – {появление решки}.

Пространство элементарных событий

События, образующие полную группу событий, являющиеся несовместимыми и равновозможными, образуют ***пространство элементарных событий.***

Испытания с монетой

Французский естествоиспытатель Жорж Бюффон бросал монету 4040 раз, и при этом герб выпал в 2048 случаях.

Английский математик Карл Пирсон бросал монету 24000 раз - герб выпал 12012 раз.

Недавно американские экспериментаторы повторили опыт. При 10000 бросаний герб выпадал 4979 раз.

Классическое определение вероятности.

Отношение числа событий, благоприятствующих появлению события А, к общему числу событий пространства, называют ***вероятностью события А*** *и обозначают Р(А).*

Таким образом

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где А - событие,

Р (А) - вероятность события,

n - общее число событий пространства элементарных событий,

m - число событий, благоприятных событию А.

Ошибка Даламбера.

Подбрасываем две одинаковые монеты. Какова вероятность того, что они упадут на одну и ту же сторону?

Решение № 1.

Опыт имеет три равновозможных исхода:

1) обе монеты упадут на «орла»;

2) обе монеты упадут на «решку»;

3) одна из монет упадет на «орла»,

Решение № 2.

Опыт имеет четыре равновозможных исхода:

1) обе монеты упадут на «орла»;

2) обе монеты упадут на «решку»;

3) первая монета упадет на «орла»,

другая на «решку».

Из них благоприятными

будут два исхода.

$$n = 3, m = 2, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3}$$

вторая на «решку»;

4) первая монета упадет на «решку», вторая на «орла».

Из них благоприятными будут

два исхода.

$$n = 4, m = 2, P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Великий французский философ и математик Даламбер вошел в историю теории вероятностей со своей знаменитой ошибкой, суть которой в том, что он неверно определил равновозможность исходов в опыте всего с двумя монетами!

Свойства вероятности.

1. *Вероятность достоверного события равна 1*
2. *Вероятность невозможного события равна 0*
3. *Вероятность события А не меньше 0 , но не больше 1*

Математически эти свойства записываются так:

1. **P(u) = 1** (u – достоверное событие);
2. **P(v) = 0** (v – невозможное событие);
3. **0 ≤ P(A) ≤ 1.**

Практикум по решению задач.

Задача1. *Наблюдения показывают, что в среднем среди 1000 новорожденных детей 514 мальчиков. Какова частота рождения мальчика в такой серии наблюдений?*

Решение.

А – {Рождение мальчика}

n – количество благоприятных событий

m – общее количество событий

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{514}{1000} = 0{,}514$$

Одним из первых обратил внимание на эту закономерность немецкий естествоиспытатель Александр Фридрих Вильгельм фон Гумбольт. Он высказал предположение, что это общий закон для всего человечества, и на каждую тысячу новорожденных приходится 514 мальчиков, а отношение числа мальчиков к числу девочек равно 22/21. Вслед за Гумбольтом подробно изучил эту проблему Пьер-Симон Лаплас, но, обработав статистические данные, получил иные значения - 25/24. Наблюдения Лапласа проводились в Париже и длились около 40 лет. Естественно, он решил выяснить, почему имеется расхождение в результатах. Тщательно изучив метрические книги почти за 40 лет, Лаплас установил, что дети, отданные в приют, записываются в эти книги дважды: при рождении и после того, как попали в приют. А в приют отдавали больше девочек, чем мальчиков. Отсюда и увеличение доли девочек в общем числе новорожденных.

Задача 2. Заполните таблицу:

№ задания	*Испытание*	*Число возможных исходов испытания (n)*	*Событие А*	*Число исходов, благоприятствующих событию (m)*	*Вероятность события P(A)=m/n*
1	**Подбрасывание игрального кубика**	6	**Выпавшее число очков нечетно**	3	1/2
2	**Подбрасывание игрального кубика**	6	**Выпавшее число очков кратно трем**	2	1/3
3	**Раскручивание стрелки рулетки, разделенной на 8 равных секторов, занумерованных числами от 1 до 8**	8	**Остановка стрелки на секторе с номером, кратным 4**	2	1/4
4	**Игра в лотерею (1500 билетов, из которых 120 выигрышных)**	1500	**Выиграли, купив один билет**	120	2/25

Задача 3.

При игре в нарды бросают 2 игральных кубика. Какова вероятность того, что на обоих кубиках выпадут одинаковые числа?

Решение. Составим таблицу.

	1	2	3	4	5	6
1	11	21	31	41	51	61
2	12	22	32	42	52	62
3	13	23	33	43	53	63
4	14	24	34	44	54	64
5	15	25	35	45	55	65
6	16	26	36	46	56	66

Вероятность: P(A)=6/36= =1/6.

Задача 4.

Из карточек составили слово «статистика». Какую карточку с буквой вероятнее всего вытащить? Какие события равновероятные?

Решение.

В слове «статистика» всего 10 букв.

Буква «с» встречается 2 раза – Р(с) = 2/10 = 1/5;

буква «т» встречается 3 раза – Р(т) = 3/10;

буква «а» встречается 2 раза – Р(а) = 2/10 = 1/5;

буква «и» встречается 2 раза –Р(и) = 2/10 = 1/5;

буква «к» встречается 1 раз – Р(к) = 1/10.

Задача 5.

В коробке 4 синих, 3 белых и 2 желтых фишки. Они тщательно перемешиваются, и наудачу извлекается одна из них. Найдите вероятность того, что она окажется: а) белой; б) желтой; в) не желтой.

Решение

а) Мы имеем всевозможных случаев 9. Благоприятствующих событий 3. Вероятность равна:

Р=3:9=1/3

б) Мы имеем всевозможных случаев 9. Благоприятствующих событий 2. Вероятность равна **Р=2:9=2/9**

в) Мы имеем всевозможных случаев 9. Благоприятствующих событий 7 (4+3). Вероятность равна **Р=7:9=7/9**

Задача 5.

На четырех карточках написаны буквы О, Л, Е, Т. Карточки перевернули и перемешали. Затем открыли наугад последовательно эти карточки и положили в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «ЛЕТО»?

Решение.

Исходы – все возможные перестановки из четырех элементов (О, Л, Е, Т); общее число исходов $n = P_4 = 4! = 24$

Событие А - {после открытия карточек получится слово «ЛЕТО»}:

$$m = 1 \qquad P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{24}$$

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 28. Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Параллельность в пространстве

<u>План</u>

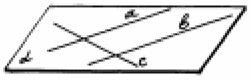
1. Взаимное расположение двух прямых в пространстве.

2. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

3. Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Определение. Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

a || b (прямая a параллельна прямой b)



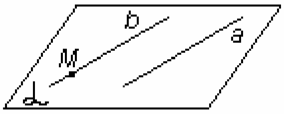
прямая c и прямая a не параллельны

прямая c и прямая b не параллельны

рис. 8

Теорема о параллельных прямых. Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

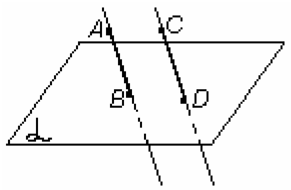
$M \notin a$



$b \| a$ и $M \in b$ (b - единственная)

рис. 9

Определение. Два отрезка называются параллельными, если они лежат на параллельных прямых.

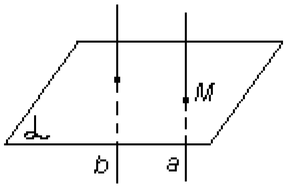


отрезок CD || отрезку AB

рис. 10

Свойства параллельных прямых

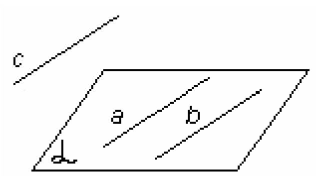
Свойство 1. Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.



$$\left.\begin{array}{l} a \cap \alpha = M \\ b \parallel a \end{array}\right| \Rightarrow b \cap \alpha$$

рис. 11

Свойство 2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.



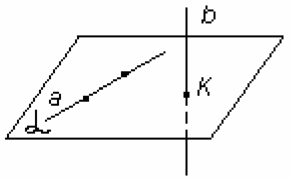
$$\left.\begin{array}{l} a \parallel c \\ b \parallel c \end{array}\right| \Rightarrow a \parallel b$$

рис. 12

Определение. Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.

Признак скрещивающихся прямых.

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.



$a \subset \alpha$

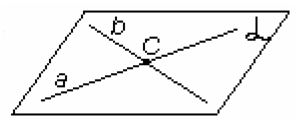
$b \cap \alpha =$ K => a и b - скрещивающиеся прямые.

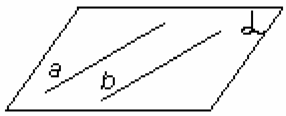
$K \notin a$

рис. 13

Выводы:

Случаи взаимного расположения прямых в пространстве.





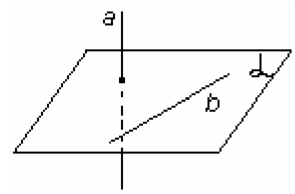


рис. 14. Пересекающиеся прямые (лежат в одной плоскости).

рис. 15. Параллельные прямые (лежат в одной плоскости).

рис. 16. Скрещивающиеся прямые (не лежат в одной плоскости).

Замечания:

1.

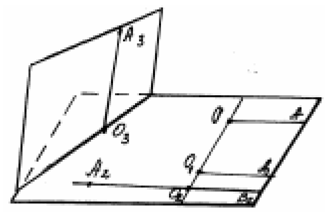
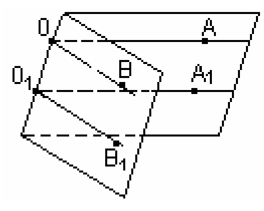


рис. 17

лучи OA и O_1A_1 сонаправлены

лучи A_2B_2 и O_2B_2 сонаправлены

лучи O_3A_3 и O_1A_1 не являются сонаправленными



OA || O_1A_1

OB || O_1B_1, то угол AOB равен углу $A_1O_1B_1$ (углы с сонаправленными сторонами)

рис. 18

2. Угол между прямыми.

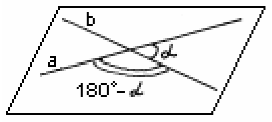


рис. 19

Если α - меньший из всех образованных углов, то угол (a; b) = α

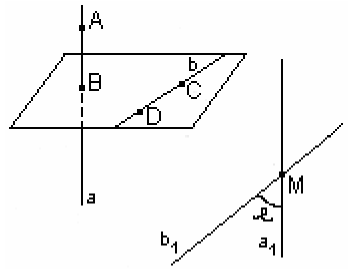


рис. 20

a и b - скрещивающиеся прямые. M - произвольная точка пространства, через которую проведём прямые $a_1 || a$ и $b_1 || b$ Если угол (a_1 ; b_1) = γ, то угол (a ;b) = γ

Определение. Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек (a || α)

Признак параллельности прямой и плоскости.

Теорема. Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна самой плоскости.

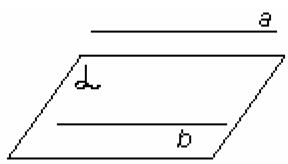


рис. 21

$$\left.\begin{array}{l} a || b \\ b \subset \alpha \\ a \not\subset \alpha \end{array}\right| \Rightarrow$$

Замечания.

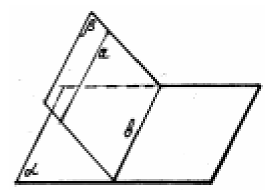


рис. 22

1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, а другая прямая имеет с плоскостью общую точку, то эта прямая лежит в данной плоскости.

Выводы.

Случаи взаимного расположения прямой и плоскости:

а) прямая лежит в плоскости;
б) прямая и плоскость имеют только одну общую точку;
в) прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.

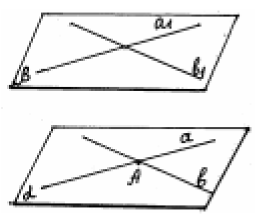


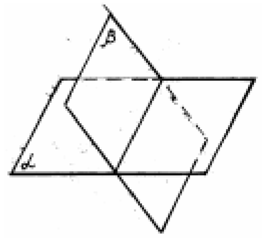
рис. 23

Определение. Две плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек.

Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

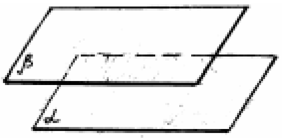
Теорема. Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Случаи взаимного расположения плоскостей:



плоскости α и β пересекаются.

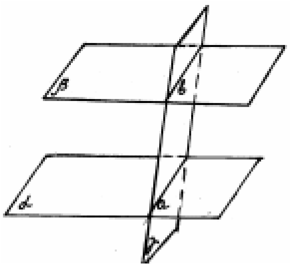
рис. 24



плоскости α и β параллельны.

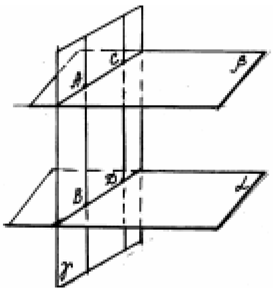
рис. 25

Свойства параллельных плоскостей:



1. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

рис. 26



2. Отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями, равны.

рис. 26a

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 29. Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

<u>*План*</u>

1. Перпендикулярность прямой и плоскости.

2. Перпендикуляр, наклонная, проекция наклонной на плоскость.

3. Теорема о трех перпендикулярах.

Две прямые в пространстве называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^{o}.

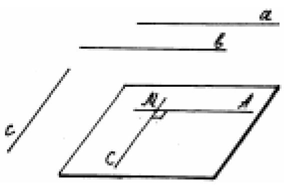


рис. 37

Перпендикулярные прямые могут пересекаться и могут быть скрещивающимися.

Лемма. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к третьей прямой, то и другая прямая перпендикулярна к этой прямой.

Определение. Прямая называется перпендикулярной к плоскости, если она перпендикулярна к любой прямой, лежащей в плоскости.

Говорят также, что плоскость α перпендикулярна к прямой а.

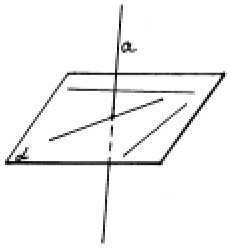


рис. 38

Если прямая а перпендикулярна к плоскости α, то она, очевидно, пересекает эту плоскость. В самом деле, если бы прямая а не пересекала плоскость α, то она лежала бы в этой плоскости или была бы параллельна ей.

Но в том и в другом случае в плоскости α имелись бы прямые, не перпендикулярные к прямой а, например прямые, параллельные ей, что невозможно. Значит, прямая а пересекает плоскость α.

Связь между параллельностью прямых и их перпендикулярностью к плоскости.

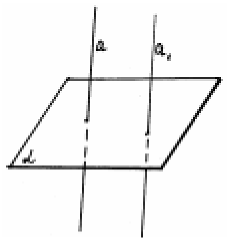


рис. 39

1. Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к плоскости, то и другая прямая перпендикулярна к этой плоскости.
2. Если две прямые перпендикулярны к плоскости, то они параллельны.

Признак перпендикулярности прямой и плоскости.

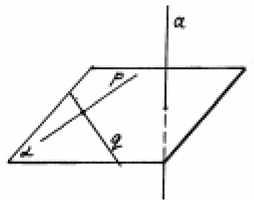


рис. 40

Теорема. Если прямая перпендикулярна к двум пересекающимся прямым, лежащим в одной плоскости, то она перпендикулярна к этой плоскости.

Замечания.

1. Через любую точку пространства проходит плоскость, перпендикулярная к данной прямой, и притом единственная.
2. Через любую точку пространства проходит прямая, перпендикулярная к данной плоскости, и притом только одна.
3. Если две плоскости перпендикулярны к прямой, то они параллельны.

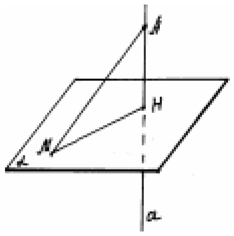


рис. 41

Точка а не лежит в плоскости α, проведём через неё прямую а, перпендикулярную к α (АН).

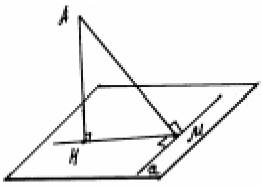
Отрезок АН называется перпендикуляром, проведённым из А к α, точка Н - основание перпендикуляра. М - точка плоскости α, отличная от Н. Отрезок АМ - наклонная к плоскости α, М - её основание, отрезок НМ - проекция наклонной на плоскость α.

Перпендикуляр АН меньше наклонной АМ.

Длина АН называется расстоянием от точки А до плоскости α.

Замечания.

1. Если прямая параллельна плоскости, то расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется расстоянием между прямой и параллельной ей плоскостью.
2. Если две плоскости параллельны, то расстояние от произвольной точки одной из плоскостей до другой называется расстоянием между данными плоскостями.
3. Если две прямые скрещиваются, то расстояние между одной из этих прямых и плоскостью, проведённой через другую прямую параллельно первой, называется расстоянием между скрещивающимися прямыми.



Теорема о трёх перпендикулярах. Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к её проекции, перпендикулярна и к самой наклонной.

рис. 42

Обратная теорема. Прямая, проведённая в плоскости через основание наклонной перпендикулярно к ней, перпендикулярна и к её проекции.

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если точка лежит в плоскости.

Проекцией прямой на плоскость, не перпендикулярную к этой прямой, является прямая.

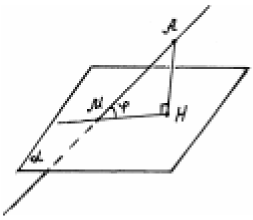


рис. 43

Определение. Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется угол между прямой и её проекцией на плоскость.

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, и не принадлежащими одной плоскости.

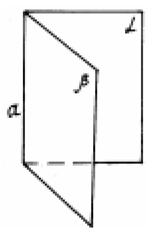
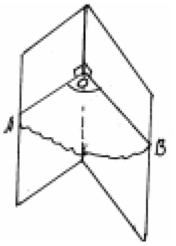


рис. 44

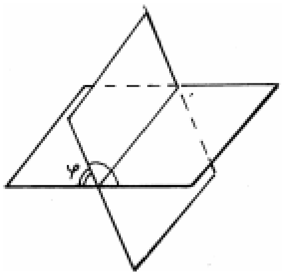
а - ребро двугранного угла, полуплоскости - грани его.



Угол АОВ - линейный угол двугранного угла. Чтобы его построить, нужно выбрать произвольную точку О на ребре, а лучи ОА и ОВ должны быть перпендикулярны к ребру.

рис. 45

Определение. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера любого из его линейных углов.



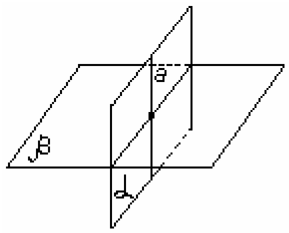
Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если он равен 90° (меньше 90°, больше 90°).

рис. 46

Пусть φ - тот из углов, который не превосходит любого из трёх остальных углов. Тогда угол между пересекающимися плоскостями равен φ. ($0^{\circ}<\varphi\leq 90^{\circ}$)

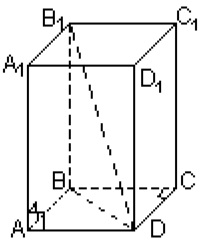
Определение. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

Признак перпендикулярности двух плоскостей.



Если одна из двух плоскостей (α) проходит через прямую (а), перпендикулярную другой плоскости (β), то такие плоскости перпендикулярны.

рис. 47



Прямоугольный параллелепипед. Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основаниям, а основания представляют собой прямоугольники.

рис. 48

Свойства.

1. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней представляют собой прямоугольники.
2. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда являются прямыми
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 30. Многогранники. Призма, ее элементы. Виды призм

План

1. Многогранники и их элементы.

2. Призма.

3. Прямая и наклонная призма.

4. Правильная призма.

5. Параллелепипед.

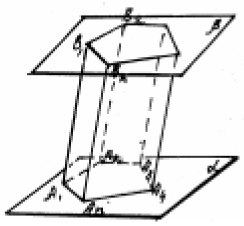
6. Куб

Поверхность, составленную из многоугольников и ограничивающую некоторое геометрическое тело, будем называть многогранником. Тетраэдр и параллелепипед - примеры многогранников. Многоугольники, из которых составлен многогранник, называются его гранями.

Стороны граней называются рёбрами, а концы рёбер - вершинами многогранника. Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю многогранника.

Многогранники бывают выпуклые и невыпуклые. Многогранник называется выпуклым, если он расположен по одну сторону от плоскости каждой его грани.

В выпуклом многограннике сумма всех плоских углов при каждой его вершине меньше 360°.



Многогранник, составленный из двух равных многоугольников $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенных в параллельных плоскостях, и n-параллелограммов, называется призмой.

рис. 50

Многоугольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ называются основаниями, а параллелограммы - боковыми гранями призмы. Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ... , A_nB_n называются боковыми рёбрами призмы. Боковые рёбра призмы равны друг другу как отрезки параллельных прямых, заключённые между параллельными плоскостями. Призму с основаниями $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$ обозначают $A_1A_2...A_nB_1B_2...B_n$ и называют n-угольной призмой.

Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой призмы.

Если боковые рёбра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется прямой, в противном случае - наклонной. Высота прямой призмы равна ее боковому ребру.

Прямая призма называется правильной, если ее основания - правильные многоугольники. У такой призмы все боковые грани - равные прямоугольники.

Площадью полной поверхности призмы называется сумма площадей всех ее граней, а площадью боковой поверхности призмы - сумма площадей ее боковых граней.

$S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн}$

Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы.

1. **Параллелепипед.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$: поверхность, составленная из двух равных параллелограммов $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$, лежащих в параллельных плоскостях и четырёх параллелограммов.

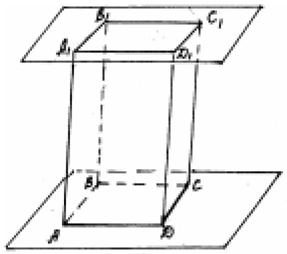


рис. 28

все параллелограммы - грани, их стороны - рёбра, их вершины - вершины параллелепипеда.

Считается: $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ - основания, остальные грани - боковые.

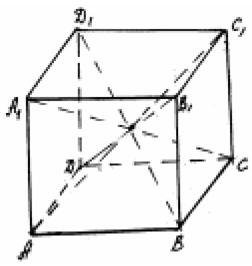


рис. 29

Отрезок, соединяющий противоположные вершины, называется диагональю параллелепипеда: A_1C, D_1B, AC_1, DB_1.

Свойства:

1. Противоположные грани параллелепипеда параллельны и равны.

2. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.

2. **Сечения.** Секущая плоскость тетраэдра (параллелепипеда) - любая плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного тетраэдра (параллелепипеда). Секущая плоскость пересекает грани тетраэдра (параллелепипеда) по отрезкам. Многоугольник, сторонами

которого являются эти отрезки, называется сечением тетраэдра (параллелепипеда).

Задача 1. Точки M, N и P лежат соответственно на рёбрах AB, BD и CD тетраэдра ABCD. Построить сечение тетраэдра плоскостью MNP. (рис. 30)

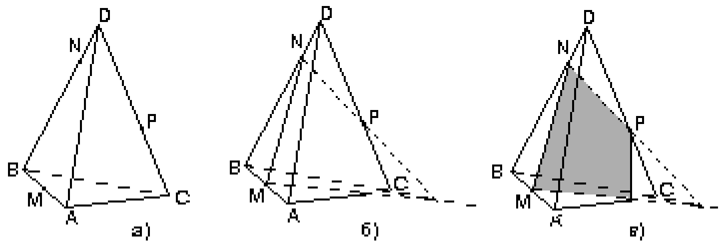


рис. 30

Задача 2. На рёбрах параллелепипеда даны три точки A, B и C. Построить сечение параллелепипеда плоскостью ABC. (рис. 31)

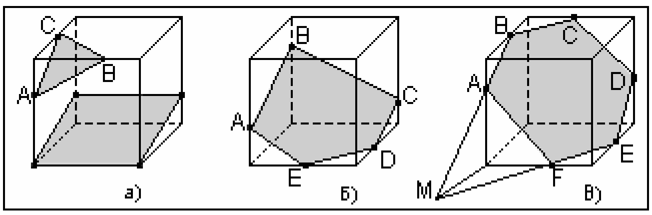
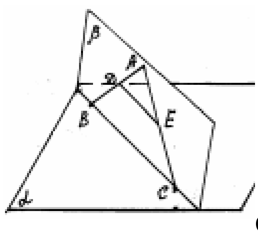


рис. 31

Примеры решения задач.

Задача 1. Из точки A к плоскости α проведены два отрезка AC и AB = 9 см, точка D $\in$ AB, точка E $\in$ AC, DE || α и AE/EC = 1/2. Найти отрезки AD и DB.

Решение:



1) Так как прямые AB и AC пересекающиеся, то по следствию 2 из аксиом существует плоскость (ABC), пусть β.

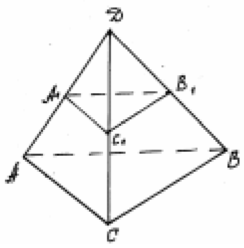
рис. 32

2) По аксиоме 3 $\beta \cap \alpha$ = BC. По аксиоме 2 DE принадлежит β, а т.к. DE||α, то DE||BC.

3) По теореме Фалеса AE/EC = AD/DB. Пусть AD = x и DB = 9-x, тогда 1/2 = x/(9-x), 9-x = 2x, x=3, т.е. AD = 3 см, DB = 9-3 = 6 (см).

Ответ: AD = 3 см, DB = 6 см.

Задача 2.



Дано: DABC - тетраэдр, A_1, B_1, C_1 - середины рёбер AD, CD и BD.

Доказать: (ABC) || ($A_1B_1C_1$)

рис. 33

Доказательство:

1. По аксиоме 2 A_1C_1 принадлежит (A D C), а т.к. A_1 и C_1 - середины AD и DC, то A_1C_1 - средняя линия $\triangle$ADC => A_1C_1 || AC по свойству средней линии.
2. Аналогично рассуждая, получаем: A_1B_1 || AB.
3. По признаку параллельности плоскостей (ABC) || ($A_1B_1C_1$).

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 31. Пирамида, ее элементы. Виды пирамид.

<u>План</u>

1. Пирамида

2. Правильная пирамида

3. Усеченная пирамида

4. Сечения многогранников

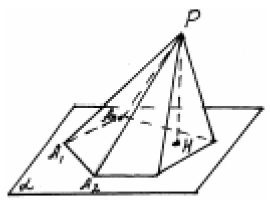


рис. 51

Многогранник составленный из n-угольника $A_1A_2...A_n$ и n треугольников, называется пирамидой. Многоугольник $A_1A_2...A_n$ называется основанием, а треугольники - боковыми гранями пирамиды. Точка P называется вершиной пирамиды, а отрезки PA_1, PA_2, ..., PA_n - её боковыми рёбрами.

Пирамиду с основанием $A_1A_2…A_n$ и вершиной P обозначают так: $A_1A_2...A_n$ и называют n-угольной пирамидой.

Треугольная пирамида - это тетраэдр.

Перпендикуляр, проведённый из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды. На рисунке отрезок PH - высота пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех её граней (т.е. основания и боковых граней), а площадью боковой поверхности пирамиды - сумма площадей её боковых граней. Поэтому

$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

Пирамида называется правильной, если её основание - правильный многоугольник, а отрезок, соединяющий вершину пирамиды с центром основания, является высотой.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Высота боковой грани правильной пирамиды, проведённая из её вершины, называется апофемой.

Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

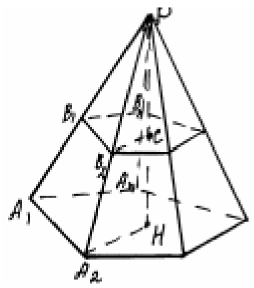


рис. 52

Многогранник, гранями которого являются n-угольники $A_1A_2...A_n$ и $B_1B_2...B_n$, расположенные в параллельных плоскостях, и n четырёхугольников (боковые грани), называется усечённой пирамидой.

Отрезки A_1B_1, A_2B_2, ... - рёбра.

Перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания, называется высотой усечённой пирамиды.

Боковые грани усечённой пирамиды - трапеции.

Усечённая пирамида называется правильной, если она получена сечением правильной пирамиды. Основания правильной усечённой пирамиды - правильные многоугольники, а боковые грани - равнобедренные трапеции. Высоты этих трапеций называются апофемами.

Площадью боковой поверхности усеченной пирамиды называется сумма площадей её боковых граней.

Теорема. Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды равна произведению полусуммы периметров оснований на апофему.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 32.Тела и поверхности вращения. Цилиндр

1. Цилиндр и его элементы

2. Развертка цилиндра

3. Сечения цилиндра

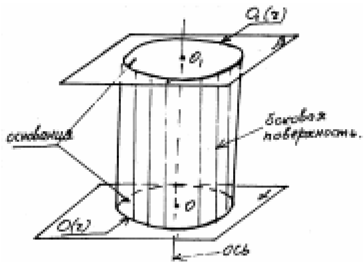


рис. 53

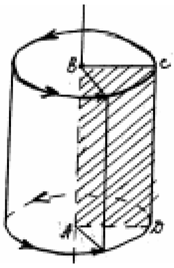
Пусть α и β - параллельные плоскости, O(r) - окружность в плоскости α.

Через каждую точку этой окружности проведём прямую, перпендикулярную к плоскости α.

Отрезки таких прямых, заключённые между плоскостями α и β, образуют цилиндрическую поверхность. Сами отрезки называются образующими цилиндрической поверхности.

Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя кругами с границами O(r) и O_1(r), называется цилиндром.

Цилиндрическая поверхность называется боковой поверхностью цилиндра, а круги - основаниями цилиндра. Образующие цилиндрической поверхности называются образующими цилиндра, OO_1 - осью цилиндра. Все образующие цилиндра параллельны и равны. Длина образующей называется высотой цилиндра, радиус основания - радиусом цилиндра.



Цилиндр может быть получен вращением прямоугольника ABCD вокруг прямой AB, содержащей одну из его сторон. При этом боковая поверхность цилиндра образуется вращением стороны CD, а основания - вращением сторон BC и AD.

рис. 54

Рассмотрим сечение цилиндра с различными плоскостями. Если секущая плоскость проходит через ось цилиндра, то сечение представляет собой прямоугольник, две стороны которого - образующие, а две другие - диаметры оснований цилиндра.

Такое сечение называется осевым.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси цилиндра, то сечение является кругом.

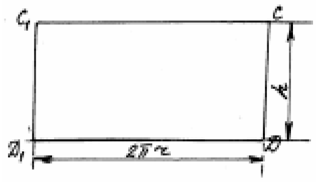


рис. 55

Развёртка боковой поверхности цилиндра - прямоугольник CDD_1C_1, который получится, если боковую поверхность "разрезать" по образующей CD и "развернуть" на плоскости.

$CD = h$ (высота цилиндра). $DD_1 = 2\pi r$.

За площадь боковой поверхности цилиндра принимается площадь ее развёртки. Так как площадь прямоугольника $DD_1CD = 2\pi rh$, то $S_{бок}$ боковой поверхности цилиндра радиуса r и высотой h получается формула:

$S_{бок} = 2\pi rh$

Итак, площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению длины окружности основания на высоту цилиндра.

Площадью полной поверхности цилиндра называется сумма площадей боковой поверхности и двух оснований. Так как площадь каждого основания равна πr^2, то для вычисления площади $S_{цил}$ полной поверхности цилиндра получаем формулу:

$$S_{цил} = 2\pi r\,(r + h)$$

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 32. Конус. Шар и сфера.

План

1.Конус и его элементы

2. Усеченный конус.

3. Развертки усеченного конуса и его элементов

4. Шар

5. Сфера

6. Сечения шара и сферы. Сектор. Сегмент.

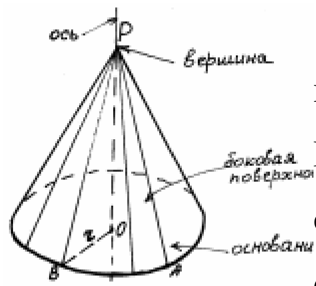


рис. 56

Пусть O(r) - окружность, а OP - прямая, перпендикулярная к плоскости этой окружности. Каждую точку окружности O(r) соединим отрезком с точкой P. Поверхность, образованная этими отрезками, называется конической поверхностью.

Тело, ограниченное конической поверхностью и кругом с границей O(r), называется конусом. Коническая поверхность называется боковой поверхностью конуса, а круг - основанием конуса. Точка P называется вершиной конуса. Отрезки, соединяющие точки окружности O(r) с вершиной P, называются образующими конуса PA, PB и другие.

Все образующие конуса равны. Прямая ОР проходящая через центр основания и вершину, называется осью конуса, отрезок ОР - высота конуса.

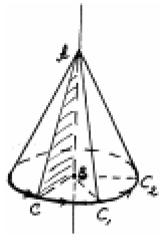


рис. 57

Конус может быть получен вращением прямоугольного треугольника вокруг прямой, содержащей один из его катетов (треугольника АВС вокруг прямой АВ). При этом боковая поверхность конуса образуется вращением гипотенузы АС, а основание - вращением катета ВС.

Если секущая плоскость проходит через ось конуса, то сечение равнобедренный треугольник, основание которого - диаметр основания конуса, а боковые стороны - образующие. Сечение называется осевым.

Если секущая плоскость перпендикулярна к оси, то сечение - круг.

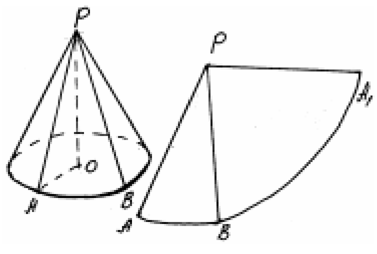


рис. 58

Боковую поверхность конуса можно развернуть на плоскость, разрезав ее по одной из образующих.

Развёрткой боковой поверхности конуса является круговой сектор, радиус которого равен образующей конуса, а длина дуги сектора - длине окружности основания конуса.

За площадь боковой поверхности конуса принимается площадь ее развёртки.

$$S_{бок} = \frac{\pi l^2}{360} \cdot \alpha$$

, где l - образующая, α - градусная мера дуги ABA_1, или

$S_{бок} = \pi rl$

Площадью полной поверхности конуса называется сумма площадей боковой поверхности и основания:

$S_{кон} = \pi r(l+r)$

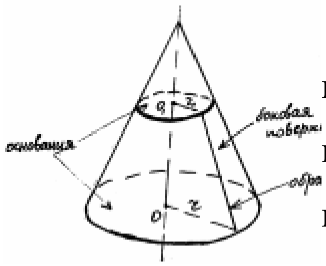


рис. 59

Усеченный конус. Рассмотрим произвольный конус с окружностью основания O(r) и проведем секущую плоскость, перпендикулярную к оси конуса. Эта плоскость пересекается с конусом по некоторому кругу с границей $O_1(r_1)$ и разбивает конус на две части.

Одна из этих частей представляет собой конус, а другая называется усеченным конусом. Основание исходного конуса и круг, получающийся в сечении этого конуса плоскостью, называются основаниями, а отрезок, соединяющий их центры - высотой усеченного конуса.

Сферой называется поверхность, состоящая из всех точек пространства, расположенных на данном расстоянии от данной точки.

Данная точка называется центром сферы, а данное расстояние - радиусом сферы. Радиус сферы часто обозначается буквой R.

рис. 60

Любой отрезок, соединяющий центр и какую-то точку сферы называется радиусом сферы.

Отрезок, соединяющий две точки сферы и проходящий через ее центр, называется диаметром сферы.

Сфера может быть получена вращением полуокружности вокруг прямой, содержащей диаметр полуокружности.

Тело, ограниченное сферой, называется шаром. Центр, радиус и диаметр сферы называется также центром, радиусом и диаметром шара.

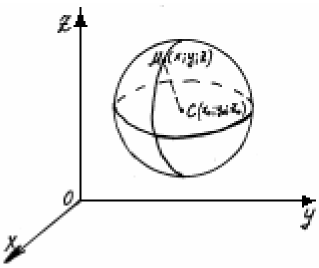


рис. 61

В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром в точке $C(X_0; Y_0; Z_0)$ имеет вид: $(X - X_0)^2 + (Y - Y_0)^2 + (Z - Z_0)^2 = R^2$.

Если сфера с центром в начале координат, то $X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2$.

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания сферы и плоскости. α - касательная к сфере с центром O, A - точка касания.

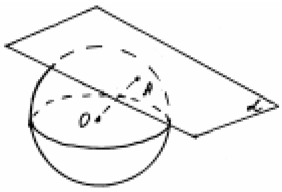


рис. 62

Теорема. Радиус сферы, проведённый в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Обратная теорема. Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащей на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Площадь сферы радиуса R: $S = 4\pi r^2$.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

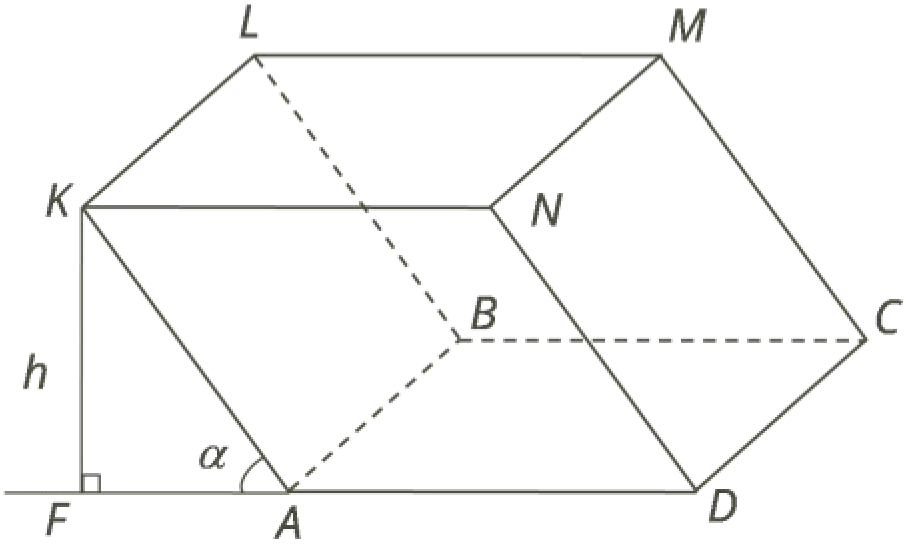
Занятие 34. Объемы многогранников и тел вращения.

План

1. Объемы тел вращения

2. Объемы многогранников.

Наклонная призма — это призма, боковые рёбра которой не перпендикулярны основанию.



ABCD;KLMN — **основания** призмы.

AKLB;BLMC;DNMC;AKND — **боковые грани**. Всебоковые грани наклонной призмы являются параллелограммами.

AK;BL;CM;DN — **боковые рёбра**. Боковые рёбра параллельны между собой и равны.

$KF=h$ — **высота наклонной призмы** (перпендикуляр, проведённый из какой-нибудь точки одного основания к плоскости другого основания).Часто перпендикуляр проводят с одной из вершин верхнего основания.

$\angle KAF=\alpha$ — угол между боковым ребром и плоскостью основания.

Площадью боковой поверхности наклонной призмы называется сумма площадей её боковых граней.

Площадью полной поверхности наклонной призмы называется сумма площадей всех её граней.

Объём наклонной призмы равен произведению площади основания на высоту

$V=S(ABCD)\cdot h$

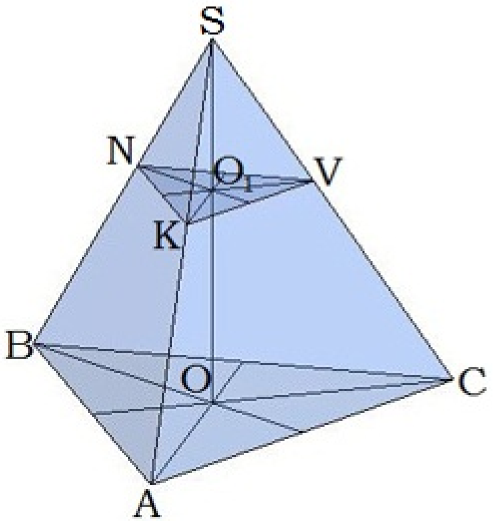
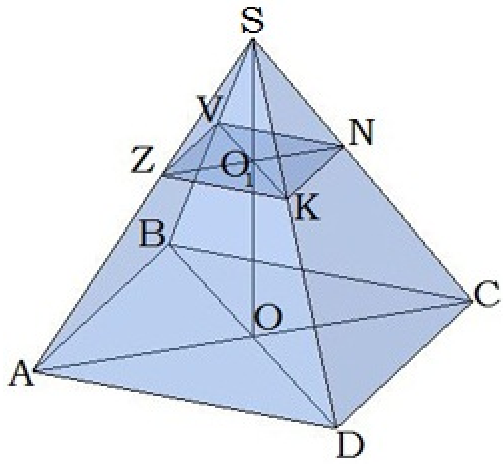
Площадь боковой поверхности наклонной призмы равна произведению периметра перпендикулярного сечения на длину бокового ребра.

Объём наклонной призмы равен площади перпендикулярного сечения на боковое ребро.

Перпендикулярное сечение — пересечение призмы и плоскости, перпендикулярной её боковому ребру.

Усечённой пирамидой называется часть пирамиды между её основанием и плоскостью, параллельной ему.

Усечённая пирамида, полученная из правильной пирамиды, сечением, параллельным её основанию, называется правильной усечённой пирамидой.

	
Правильная усечённая треугольная пирамида ABCKNV, ABC и KNV - основания пирамиды, OO1 - высота.	Правильная усечённая четырёхугольная пирамида ABCDZVNK, ABCD и ZVNK - основания, OO1 - высота.

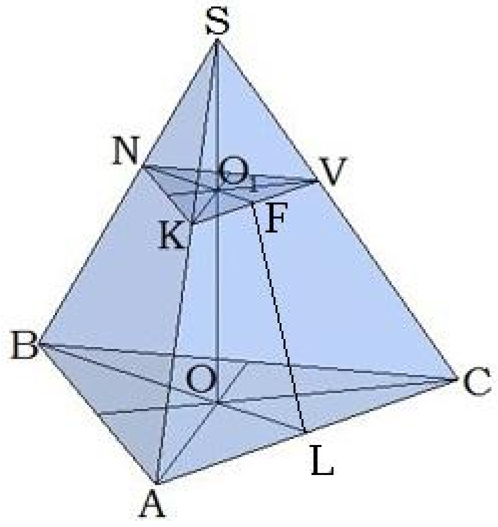
Объём усечённой пирамиды

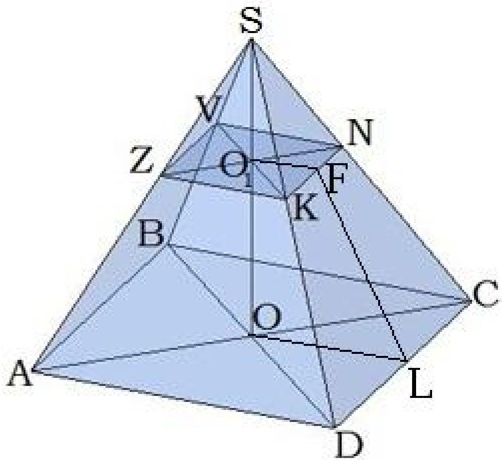
V=13H·(S1+S1·S2−−−−−−√+S2),гдеS1иS2− площади оснований

Площадь боковой поверхности правильной усечённой пирамиды

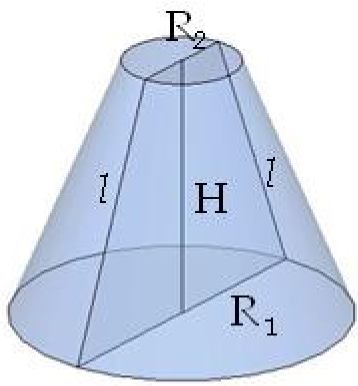
Sбок.=12(P1+P2)·h,гдеP1иP2−периметры оснований

h - апофема правильной усечённой пирамиды, на данных рисунках это отрезок LF.





Усечённый конус - тело вращения, которое получается при вращении прямоугольной трапеции вокруг меньшей боковой стороны.



R2 - радиус меньшего основания

R1 - радиус большего основания

l - образующая

H - высота

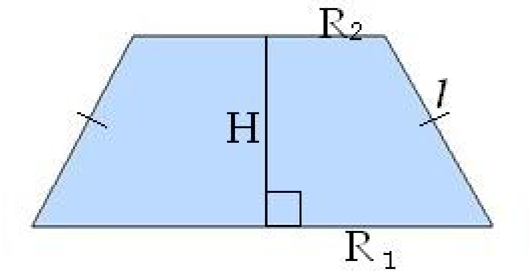
Площадь боковой поверхности усечённого конуса

Sбок.=π·l·(R1+R2),гдеR1иR2−радиусы оснований, l - образующая.

Sполн.=Sбок.+S1+S2,гдеS1,S2 - площади оснований усечённого конуса.

Объём усечённого конуса V=13π·H·(R21+R1·R2+R22), где H - высота усечённого конуса.

При решении задач чаще всего достаточно нарисовать только осевое сечение усечённого конуса, которое является равнобедренной трапецией.



ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 35. Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве.

План

1. ПДСК в пространстве.

2. Координаты точек.

3. Координаты середины отрезка.

4. Формула расстояния между двумя точками.

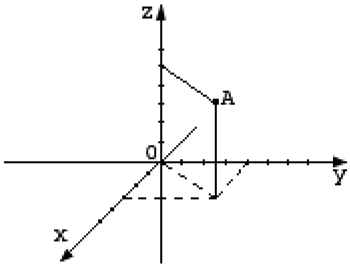


рис. 69

Если через некоторую точку пространства проведены три попарно перпендикулярные прямые, на каждой из них выбрано направление (оно обозначается стрелкой) и выбрана единица измерения отрезков, то говорят, что задана прямоугольная система координат в пространстве.

Ox, Oy, Oz - оси абсцисс, ординат и аппликат. Координаты точки M записываются так: M (x; y; z).

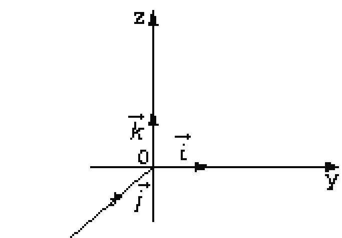


рис. 70

Зададим в пространстве прямоугольную систему координат Oxyz. На каждой из положительных полуосей отложим от начала координат единичные векторы (длины которых равны единице):

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$.

Эти векторы назовем координатными векторами, они не компланарны. Поэтому любой вектор а можно разложить по координатным векторам, т.е. представить в виде:

$$\bar{a} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$$

причем коэффициенты разложения x, y, z определяются единственным образом.

Коэффициенты x, y и z в разложении называются координатами вектора $\bar{a}$ в данной системе координат.

Координаты вектора $\bar{a}$ будем записывать в фигурных скобках после обозначения вектора: $\bar{a}$ {x ; y ; z}.

Координаты равных векторов равны.

Правила действия над векторами.

1. Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Если $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$, то $\bar{c}\{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$; где $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$.
2. Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Если $\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$, то $\bar{c}\{x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2\}$.
3. Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Если $k\bar{a} = \bar{b}$, то $\bar{b}\{kx_1; ky_1; kz_1\}$.

Координаты любой точки D в прямоугольной системе координат Oxyz равны соответствующим координатам вектора $\overline{OD}$.

Т.о. если A(x; y; z), то $\overline{OA}$ {x ; y ; z}.

А т.к. $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$, то каждая координата вектора равна разности соответствующих координат его конца и начала.

Простейшие задачи в координатах.

1. Координаты середины отрезка.

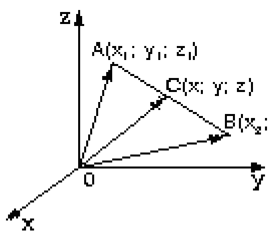


рис. 71

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), y = \frac{1}{2}(y_1 + y_2), z = \frac{1}{2}(z_1 + z_2)$$

Таким образом, каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.

2.

3. Вычисление длины вектора по его координатам.

Пусть $\bar{a}$ $\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, тогда $|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

4. Расстояние между двумя точками. $M_1\{x_1;\ y_1;\ z_1\}$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$, тогда

$$M_1M_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]

Занятие 36.Векторы в пространстве.

План

1. *Векторы .*
2. *Модуль вектора.*
3. *Равенство векторов.*
4. *Сложение векторов.*
5. *Умножение вектора на число.*
6. *Разложение вектора по направлениям.*
7. *Угол между двумя векторами.*
8. *Проекция вектора на ось.*
9. *Координаты вектора.*
10. *Скалярное произведение векторов.*

Основные определения и обозначения для векторов в пространстве вводятся так же, как и для векторов на плоскости.

Вектором называется отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой - концом. Любая точка пространства рассматривается как нулевой вектор.

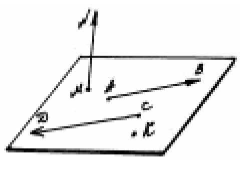


рис. 63

$\overline{KK}$ - нулевой вектор, обозначается $\bar{0}$.

Длина вектора $\overline{AB}$ обозначается $|\overline{AB}|$.

Два ненулевых вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной или на параллельных прямых.

Пусть два ненулевых вектора $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны. Если при этом лучи AB и CDсонаправлены, то $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются сонаправленными, а если эти лучи не являются сонаправленными, то векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются противоположно направленными.

Нулевой вектор условимся считать сонаправленным с любым вектором. Запись $\bar{a}\uparrow\uparrow\bar{b}$ означает, что векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены, а запись $\bar{c}\uparrow\downarrow\bar{d}$ - что векторы c и d противоположно направлены.

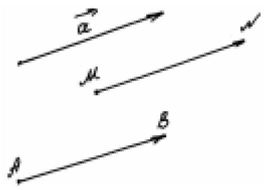


рис. 64

Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.

От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.

Действия над векторами.

1. **Сложение векторов по правилу треугольника:**

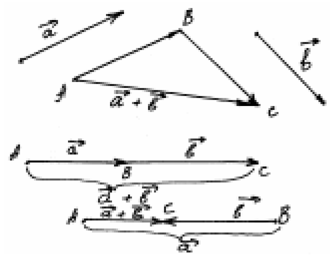


рис. 65

для этого нужно от произвольной точки пространства отложить вектор $\overline{AB}$, равный $\bar{a}$, затем от точки В отложить вектор $\overline{BC}$, равный $\bar{b}$.

Вектор $\overline{AC}$ называется суммой $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Таким образом $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$, для любых трех точек А, В и С.

2. **Сложение векторов по правилу параллелограмма:**

рис. 66

для этого векторы откладывают от одной точки.

3. Два ненулевых вектора называются противоположными, если их длины равны и они противоположно направлены.

4. **Вычитание векторов:**

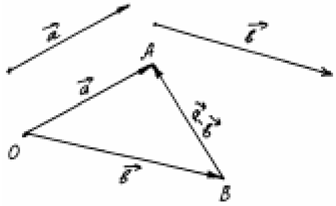


рис. 67

Разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор, сумма которого с вектором $\bar{b}$ равна вектору $\bar{a}$.

Разность $\bar{a}$ - $\bar{b}$ можно найти по формуле $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$, где $(-\bar{b})$ - вектор, противоположный вектору $\bar{b}$.

$\overline{OA} - \overline{OB} = \overline{BA}$.

5. Сумма нескольких векторов в пространстве вычисляется так же, как и на плоскости и не зависит от порядка слагаемых.

6. **Умножение вектора на число.** Произведением ненулевого вектора $\bar{a}$ на число k называется такой вектор $\bar{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\bar{a}|$, причем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ сонаправлены при $k\geq 0$ и противоположно направлены при $k<0$. Произведением нулевого вектора на произвольное число считается нулевой вектор.

Произведение вектора $\bar{a}$ на число k обозначается так: $k\bar{a}$. Из определения произведения вектора на число следует, что для любого числа k и любого вектора $\bar{a}$ векторы $\bar{a}$ и $k\bar{a}$ коллинеарны. Из этого же определения следует, что произведение любого вектора на число нуль есть нулевой вектор.
Для любых векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и любых чисел k, 1 справедливы равенства:

$(kl)\bar{a} = k(l\bar{a})$ (сочетательный закон);

$k(\bar{a} + \bar{b}) = k\bar{a} + k\bar{b}$ (первый распределительный закон);

$(k+l)\bar{a} = k\bar{a} + l\bar{a}$ (второй распределительный закон).

Лемма. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны и вектор $\bar{a}$ не равен нулевому вектору, то существует число k такое, что вектор $\bar{b}$ равен $k\bar{a}$.

Векторы называются компланарными, если при откладывании от одной и той же точки они будут лежать в одной плоскости. Ясно, что любые два коллинеарных вектора компланарны; три вектора, среди которых имеется два коллинеарных, также компланарны, а три произвольных вектора могут быть как компланарными, так и некомпланарными.

Если вектор $\bar{c}$ можно представить в виде $\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}$, где x и y - некоторые числа, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ компланарны.

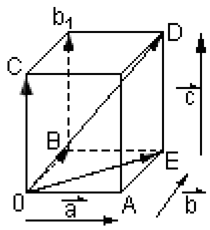


рис. 68

Для сложения трёх некомпланарных векторов можно пользоваться так называемым правилом параллелепипеда. Опишем его.

Пусть $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - некомпланарные векторы. Отложим от произвольной точки O пространства векторы $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{c}$ и построим параллелепипед так, чтобы отрезки OA, OB и OC были рёбрами.

Тогда если OD - диагональ этого параллелепипеда, то $\overline{OD} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$.

Действительно,

$$\overline{OD} = \overline{OE} + \overline{ED} = (\overline{OA} + \overline{AE}) + \overline{ED} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}.$$

Теорема. Любой вектор можно разложить по трём данным некомпланарным векторам, причём коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Если $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ - некомпланарные векторы, то любой вектор $\bar{d}$ можно представить в виде:

$\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$,

где x, y, z - числа.

ЛИТЕРАТУРА: [1], [2], [4], [7]