Раздел 1. Начала линейной алгебры

Занятия 1-2. Системы линейных уравнений

Систему m линейных уравнений с n неизвестными будем записывать в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda\ \Lambda \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \quad (1)$$

Здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные величины, a_{ij} ($i = 1,2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$) – числа, называемые коэффициентами системы (первый индекс фиксирует номер уравнения, второй — номер неизвестной), $b_1, b_2, \ldots, b_m$ –числа, называемые свободными членами.

Решением системы будем называть упорядоченный набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, обращающий каждое уравнение системы в верное равенство.

Решить систему — значит найти все ее решения или доказать, что ни одного решения нет.

Система, имеющая решение, называется **совместной**.

Если система имеет только одно решение, то она называется **определенной**. Система, имеющая более чем одно решение, называется **неопределенной** (**совместной** и **неопределенной**).

Если система не имеет решений, то она называется **несовместной**.

Система, у которой все свободные члены равны нулю ($b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$), называется **однородной**. Однородная система всегда совместна, так как набор из n нулей удовлетворяет любому уравнению такой системы.

Если число уравнений системы совпадает с числом неизвестных (m=n), то система называется **квадратной**.

Две системы, множества решений которых совпадают, называются **эквивалентными** или **равносильными** (совпадение множеств решений означает, что каждое решение первой системы является решением второй системы, и каждое решение второй системы является решением первой).

Две несовместные системы считаются эквивалентными.

Преобразование, применение которого превращает систему в новую систему, эквивалентную исходной, называется **эквивалентным** или **равносильным преобразованием**. Примерами эквивалентных преобразований могут служить следующие преобразования: перестановка местами двух уравнений системы, перестановка местами двух неизвестных вместе с коэффициентами у всех уравнений, умножение обеих частей какого-либо уравнения системы на отличное от нуля число.

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Рассмотрим квадратную систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 4x_1 + 6x_2 - x_3 = -1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 3 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \end{cases}. \qquad (1)$$

У этой системы коэффициент a_{11} отличен от нуля. Если бы это условие не выполнялось, то чтобы его получить, нужно было бы переставить местами уравнения, поставив первым то уравнение, у которого коэффициент при x_1 не равен нулю.

Проведем следующие преобразования системы:

1) поскольку $a_{11} \neq 0$, первое уравнение оставим без изменений;

2) вместо второго уравнения запишем уравнение, получающееся, если из второго уравнения вычесть первое, умноженное на 4;

3) вместо третьего уравнения запишем разность третьего и первого, умноженного на 3;

4) вместо четвертого уравнения запишем разность четвертого и первого, умноженного на 5.

Полученная новая система эквивалентна исходной и имеет во всех уравнениях, кроме первого, нулевые коэффициенты при x_1 (это и являлось целью преобразований 1 – 4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ 5x_2 - 7x_3 - 7x_4 = -30 \\ 4x_2 - 13x_3 - 9x_4 = -53 \end{cases}. \qquad (2)$$

Можно доказать, что **замена любого уравнения системы новым, получающимся прибавлением к данному уравнению любого другого уравнения системы, умноженного на любое число, является эквивалентным преобразованием системы.**

Для приведенного преобразования и для всех дальнейших преобразований не следует целиком переписывать всю систему, как это только что сделано. Исходную систему можно представить в виде таблицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 4 & 6 & -1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 2 & -1 & 3 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

Прямоугольную таблицу, состоящую из p строк и q столбцов, будем называть **матрицей** размера $p \times q$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \mathrm{K} & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \mathrm{K} & a_{2q} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \mathrm{K} & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Числа a_{ij} называются элементами матрицы. Первый индекс фиксирует номер строки, а второй – номер столбца, в которых стоит данный элемент. Если $p = q$, то есть число столбцов матрицы равно числу строк, то матрица называется **квадратной**. Элементы a_{ii} образуют **главную диагональ** матрицы.

Матрица (3) называется **расширенной матрицей** для исходной системы уравнений. Если из расширенной матрицы удалить столбец свободных членов, то получится **матрица коэффициентов системы**, которую иногда называют просто **матрицей системы**.

Очевидно, что матрица коэффициентов квадратной системы является квадратной матрицей.

Каждую систему m линейных уравнений с n неизвестными можно представить в виде расширенной матрицы, содержащей m строк и n+1 столбцов. Каждую матрицу можно считать расширенной матрицей или матрицей коэффициентов некоторой системы линейных уравнений. Системе (2) соответствует расширенная матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 5 & -7 & -7 & -30 \\ 0 & 4 & -13 & -9 & -53 \end{pmatrix}.$$

Преобразуем эту матрицу следующим образом:

1) первые две строки оставим без изменения, поскольку элемент a_{22} не равен нулю;

2) вместо третьей строки запишем разность между второй строкой и удвоенной третьей;

3) четвертую строку заменим разностью между удвоенной второй строкой и умноженной на 5 четвертой.

В результате получится матрица, соответствующая системе, у которой неизвестная x_1 исключена из всех уравнений, кроме первого, а неизвестная x_2 — из всех уравнений кроме первого и второго:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 39 & 29 & 175 \end{pmatrix}.$$

Теперь исключим неизвестную x_3 из четвертого уравнения. Для этого последнюю матрицу преобразуем так:

1) первые три строки оставим без изменения, так как $a_{33} \neq 0$;

2) четвертую строку заменим разностью между третьей, умноженной на 39, и четвертой:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & 11 \\ 0 & 10 & -13 & -8 & -45 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 205 & 410 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица соответствует системе

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 11 \\ 10x_2 - 13x_3 - 8x_4 = -45 \\ x_3 + 6x_4 = 15 \\ 205x_4 = 410 \end{cases}. \qquad (4)$$

Из последнего уравнения этой системы получаем $x_4 = 2$. Подставив это значение в третье уравнение, получим $x_3 = 3$. Теперь из второго уравнения следует, что $x_2 = 1$, а из первого — $x_1 = -1$. Очевидно, что полученное решение единственно (так как единственным образом определяется значение x_4, затем x_3 и т. д.).

Назовем элементарными преобразованиями матрицы следующие преобразования:

1) перемена местами двух строк;

2) умножение строки на число, отличное от нуля;

3) замена строки матрицы суммой этой строки с любой другой строкой, умноженной на некоторое число.

Если матрица **A** является расширенной матрицей некоторой системы, и путем ряда элементарных преобразований матрица **A** переводится в матрицу **B**, являющуюся расширенной матрицей некоторой другой системы, то эти системы эквивалентны.

Назовем квадратную матрицу, у которой на главной диагонали стоят числа, отличные от нуля, а под главной диагональю – нули, **треугольной матрицей**. Матрица коэффициентов системы (4) – треугольная матрица.

Если с помощью элементарных преобразований матрицу коэффициентов квадратной системы можно привести к треугольной матрице, то система совместна и определенна.

Рассмотрим другой пример:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 7 \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 10x_5 = -10 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 9 \end{cases}. \qquad (5)$$

Проведем следующие преобразования расширенной матрицы системы:

1) первую строку оставим без изменения;

2) вместо второй строки запишем разность между второй строкой и удвоенной первой;

3) вместо третьей строки запишем разность между третьей строкой и утроенной первой;

4) четвертую строку заменим разностью между четвертой и первой;

5) пятую строку заменим разностью пятой строки и удвоенной первой.

В результате преобразований получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 5 & -7 & 4 & -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Оставив без изменения первые две строки этой матрицы, приведем ее элементарными преобразованиями к следующему виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 6 & -8 \end{pmatrix}.$$

Если теперь, следуя методу Гаусса, который также называют и методом последовательного исключения неизвестных, с помощью третьей строки привести к нулю коэффициенты при x_3 в четвертой и пятой строках, то после деления всех элементов второй строки на 5 и деления всех элементов третьей строки на 2 получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая из двух последних строк этой матрицы соответствует уравнению $0x_1+0x_2+0x_3+0x_4+0x_5 = 0$. Это уравнение удовлетворяется любым набором чисел $x_1, x_2, \ldots, x_5$, и его следует удалить из системы. Таким образом, система с только что полученной расширенной матрицей эквивалентна системе с расширенной матрицей вида

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 3 & -4 \end{pmatrix}. \qquad (6)$$

Последняя строка этой матрицы соответствует уравнению $x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -4$. Если неизвестным x_4 и x_5 придать произвольные значения: $x_4 = r$; $x_5 = s$, то из последнего уравнения системы, соответствующей матрице (6), получим $x_3 = -4 + 2r - 3s$. Подставив выражения x_3, x_4, и x_5 во второе уравнение той же системы, получим $x_2 = -3 + 2r - 2s$. Теперь из первого уравнения можно получить $x_1 = 4 - r + s$. Окончательно решение системы представляется в виде

$$\begin{cases} x_1 = 4 - r + s \\ x_2 = -3 + 2r - 2s \\ x_3 = -4 + 2r - 3s \\ x_4 = r \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Рассмотрим прямоугольную матрицу **A**, у которой число столбцов m больше, чем число строк n. Если матрицу **A** можно разделить вертикальной чертой на две матрицы: стоящую слева треугольную матрицу размера m и стоящую справа прямоугольную матрицу, то матрицу **A** назовем **трапециевидной** или **трапецеидальной**. Очевидно, что матрица (6) — трапециевидная матрица.

Если при применении эквивалентных преобразований к системе уравнений хотя бы одно уравнение приводится к виду

$$0x_1 + 0x_2 + \ldots 0x_n = b_j \ \ (b_j \neq 0),$$

то система несовместна или противоречива, так как ни один набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не удовлетворяет этому уравнению.

Если при преобразовании расширенной матрицы системы матрица коэффициентов приводится к трапецеидальному виду и при этом система не получается противоречивой, то система совместна и является неопределенной, то есть имеет **бесконечно много решений**.

В последней системе можно получить все решения, придавая конкретные числовые значения параметрам r и s.

Те переменные, коэффициенты при которых стоят на главной диагонали трапецеидальной матрицы (это значит, что эти коэффициенты отличны от нуля), называются **базисными**. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_1, x_2, x_3. Остальные неизвестные называются **свободными**. В рассмотренном выше примере это неизвестные x_4, и x_5. Свободным неизвестным можно придавать любые значения или выражать их через параметры, как это сделано в последнем примере.

Базисные неизвестные единственным образом выражаются через свободные неизвестные.

Если свободным неизвестным приданы конкретные числовые значения и через них выражены базисные неизвестные, то полученное решение называется **частным решением**.

Если свободные неизвестные выражены через параметры, то получается решение, которое называется **общим решением**.

Все бесконечное множество решений системы можно получить, придавая свободным неизвестным любые числовые значения и находя соответствующие значения базисных неизвестных.

Если всем свободным неизвестным приданы нулевые значения, то полученное решение называется **базисным**.

Одну и ту же систему иногда можно привести к разным наборам базисных неизвестных. Так, например, можно поменять местами 3-й и 4-й столбцы в матрице (6). Тогда базисными будут неизвестные x_1, x_2, x_4, а свободными – x_3 и x_5. Рекомендуем читателю самостоятельно привести последнюю систему к такому виду, чтобы свободными неизвестными были x_1 и x_2, а базисными – x_3, x_4, x_5.

Если получены два различных набора базисных неизвестных при различных способах нахождения решения одной и той же системы, то эти наборы обязательно содержат одно и то же число неизвестных, называемое **рангом системы**.

Рассмотрим еще одну систему, имеющую бесконечно много решений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 + 3x_3 + 7x_4 - x_5 = 7 \\ 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 14x_4 - 2x_5 = 8 \end{cases}.$$

Проведем преобразование расширенной матрицы системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Как видно, мы не получили трапецеидальной матрицы, однако последнюю матрицу можно преобразовать, поменяв местами третий и четвертый столбцы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица уже является трапецеидальной. У соответствующей ей системы две свободных неизвестных – x_3, x_5 и три базисных – x_1, x_2, x_4. Решение исходной системы представляется в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{14}{3} - \frac{3}{2}r - \frac{11}{6}s \\ x_2 = \frac{4}{3} + \frac{1}{2}r + \frac{11}{6}s \\ x_3 = r \\ x_4 = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3}s \\ x_5 = s \end{cases}.$$

Приведем пример не имеющей решения системы:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 4 \end{cases}.$$

Преобразуем матрицу системы по методу Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & 5 \\ 4 & 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 13 & -5 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 7 \\ 0 & 13 & -5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка последней матрицы соответствует не имеющему решения уравнению $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$. Следовательно, исходная система несовместна.

Сформулируем теперь кратко суть метода Гаусса. Полагая, что в системе коэффициент a_{11} отличен от нуля (если это не так, то следует на первое место поставить уравнение с отличным от нуля коэффициентом при x_1 и переобозначить коэффициенты), преобразуем систему следующим образом: первое уравнение оставляем без изменения, а из всех остальных уравнений исключаем неизвестную x_1 с помощью эквивалентных преобразований описанным выше способом.

В полученной системе

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}^*x_2 + a_{23}^*x_3 + \ldots a_{2n}^*x_n = b_2^* \\ \qquad a_{32}^*x_2 + a_{33}^*x_3 + \ldots a_{3n}^*x_n = b_3^* \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a_{m2}^*x_2 + a_{m3}^*x_3 + \ldots a_{mn}^*x_n = b_m^* \end{cases},$$

считая, что $a_{22}^* \neq 0$ (что всегда можно получить, переставив уравнения или слагаемые внутри уравнений и переобозначив коэффициенты системы), оставляем без изменений первые два уравнения системы, а из остальных уравнений, используя второе уравнения, с помощью элементарных преобразований исключаем неизвестную x_2. Во вновь полученной системе

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots a_{1n}x_n = b_1 \\
\qquad a_{22}^{*}x_2 + a_{23}^{*}x_3 + \ldots a_{2n}^{*}x_n = b_2^{*} \\
\qquad\qquad a_{33}^{**}x_3 + \ldots a_{3n}^{**}x_n = b_3^{**} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad a_{m3}^{**}x_3 + \ldots a_{mn}^{**}x_n = b_m^{**}
\end{cases}
$$

при условии $a_{33}^{**} \neq 0$ оставляем без изменений первые три уравнения, а из всех остальных с помощью третьего уравнения элементарными преобразованиями исключаем неизвестную x_3.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не реализуется один из трех возможных случаев:

1) если в результате приходим к системе, одно из уравнений которой имеет нулевые коэффициенты при всех неизвестных и отличный от нуля свободный член, то исходная система несовместна;

2) если в результате преобразований получаем систему с матрицей коэффициентов треугольного вида, то система совместна и является определенной;

3) если получается система с трапецеидальной матрицей коэффициентов (и при этом не выполняется условие пункта 1), то система совместна и неопределенна.

Занятия 3-5. Элементы теории матриц

В предыдущем разделе было введено определение матрицы **A** размерности $p \times q$ как прямоугольной таблицы:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1q} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & a_{p3} & \dots & a_{pq} \end{pmatrix}.$$

Можно пользоваться сокращенной формой записи:

$$\mathbf{A} = (a_{ij});\ i = 1, 2, 3, \dots, p;\ j = 1, 2, 3, \dots, q.$$

Две матрицы одинаковой размерности $p \times q$ называются **равными**, если в них одинаковые места заняты равными числами (на пересечении i-й строки и j-го столбца в одной и в другой матрице стоит одно и то же число; i=1, 2, ..., p; j=1, 2, ..., q).

Пусть **A** = (a_{ij}) – некоторая матрица и α – произвольное число, тогда α**A** = (αa_{ij}), то есть **при умножении матрицы A на число α все числа, составляющие матрицу A, умножаются на число α.**

Пусть **A** и **B** – матрицы одинаковой размерности **A** = (a_{ij}), **B** = (b_{ij}), тогда их сумма **A** + **B** – матрица **C** = (c_{ij}) той же размерности, определяемая из формулы $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, то есть **при сложении двух матриц попарно складываются одинаково расположенные в них числа**.

Матрицу A можно умножить на матрицу B, то есть найти матрицу C = AB, если число столбцов *n* матрицы A равно числу строк матрицы B, при этом матрица C будет иметь столько строк, сколько строк у матрицы *A* и столько столбцов, сколько столбцов у матрицы *B*. Каждый элемент матрицы **C** определяется формулой

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\ .$$

Элемент c_{ij} матрицы-произведения C равен сумме произведений элементов *i*-строки первой матрицы- сомножителя на соответствующие элементы *j*-го столбца второй матрицы-сомножителя.

Из сказанного следует, что если можно найти произведение матриц **AB**, то произведение **BA**, вообще говоря, не определено.

Приведем примеры перемножения матриц:

$$1)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 4 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -4 \\ 6 & 2 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 33 \cdot 6 + 4 \cdot (-3) & 1 \cdot 5 + 2 \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 6 + (-3) \cdot (-3) & 2 \cdot 5 + 1 \cdot (-4) + (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) \\ 4 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) & 4 \cdot 5 + (-2) \cdot (-4) + 3 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 10 & 7 \\ 25 & 31 \end{pmatrix};$$

$$2)\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = (8,\ 4).$$

Если **AB** и **BA** одновременно определены, то, вообще говоря, эти произведения не равны. Это означает, что **умножение матриц не коммутативно**. Продемонстрируем это на примере.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}.$$

Для алгебраических действий над матрицами справедливы следующие законы:

1) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$;
2) $\alpha\,(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$;
3) $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$;
4) $(\mathbf{AB})\boldsymbol{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
5) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$.

Матрица, состоящая из одной строки, называется **вектором** (вектором-строкой). Матрица, состоящая из одного столбца, также называется вектором (вектором-столбцом).

Пусть имеется матрица $\mathbf{A} = (a_{ij})$ размерности $m \times n$, n-мерный вектор-столбец **X** и m-мерный вектор-столбец **B**:

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Тогда матричное равенство

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B}, \tag{1}$$

если расписать его поэлементно, примет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \text{KKKKKK} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Таким образом, формула (1) является записью системы m линейных уравнений с n неизвестными в матричной форме. Ниже будет показано, что, записывая систему в сжатом виде, кроме краткости написания мы получаем и другие очень важные преимущества.

Пусть имеются две квадратные матрицы одинаковой размерности:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix};\mathbf{D}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 3 & -5 & 9 \\ -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти матрицу **X**, удовлетворяющую матричному уравнению

$$\mathbf{AX} = \mathbf{D}.$$

Из правила умножения матриц следует, что матрица **X** должна быть квадратной матрицей той же размерности, что и матрицы **A** и **D**:

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}.$$

Из правила умножения матриц и из определения равенства матриц следует, что последнее матричное уравнение распадается на три системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_{11}+2x_{21}+x_{31}=2 \\ -x_{11}+3x_{21}+2x_{31}=3 \\ 2x_{11}+3x_{21}+x_{31}=-1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} x_{12}+2x_{22}+x_{32}=1 \\ -x_{12}+3x_{22}+2x_{32}=-5 \\ 2x_{12}+3x_{22}+x_{32}=4 \end{cases}; \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x_{13}+2x_{23}+x_{33}=7 \\ -x_{13}+3x_{23}+2x_{33}=9 \\ 2x_{13}+3x_{23}+x_{33}=6 \end{cases}.$$

Все три системы (2) имеют одинаковые матрицы коэффициентов, что дает возможность решать их одновременно, введя матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & -5 & 9 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Здесь первые четыре столбца образуют расширенную матрицу первой системы, первые три столбца вместе с пятым столбцом образуют расширенную матрицу второй системы, а первые три столбца вместе с шестым – расширенную матрицу третьей системы.

Применим для решения **метод Жордана-Гаусса** который является модификацией метода Гаусса.

Первый шаг преобразования матрицы по методу Жордана-Гаусса совпадает с первым шагом преобразований по методу Гаусса. Оставляем без изменений первую строку матрицы, а во второй и третьей “организуем” нули в первом столбце:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 0 & 5 & 3 & 5 & -4 & 16 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь, следуя методу Жордана-Гаусса, **оставляем без изменения лишь вторую строку** (так как $a_{22} \neq 0$) и получаем с помощью второй строки в **первой и третьей строках во втором столбце нули**. Для этого вместо первой строки пишем сумму первой строки, умноженной на 5, и второй строки, умноженной на –2. Вместо третьей строки пишем сумму третьей строки , умноженной на 5, и второй строки, умноженной на –1 После деления полученной третьей строки на 2 получаем матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 0 & 13 & 3 \\ 0 & 5 & 3 & 5 & -4 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Чтобы в первой и второй строках в третьем столбце получить нули, проведем следующие преобразования последней матрицы. Оставив третью строку без изменений, заменим вторую строку разностью второй строки и утроенной третьей, а первую – суммой первой и третьей строк. После деления первой и второй строк преобразованной матрицы на 5 получится матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 10 & -3 & 2 \end{pmatrix}. \qquad (3)$$

При преобразовании системы по методу Жордана-Гаусса матрица коэффициентов приводится (если это возможно) к такому виду, что на главной диагонали стоят единицы, а над главной диагональю и под главной диагональю – нули.

Если взять первые четыре столбца матрицы (3), то получится матрица, в которую преобразовалась расширенная матрица первой из систем уравнений (2). Из нее следует: x_{11}=2; x_{21}=–5; x_{31}=10. Матрица, образованная первыми тремя столбцами вместе с пятым столбцом матрицы (3), дает решение второй системы уравнений (2): x_{12}=2; x_{22}=1; x_{32}=–3. И, наконец, матрица, образованная первыми тремя столбцами вместе шестым столбцом матрицы (3), дает решение третьей системы уравнений (2): x_{13}=3; x_{23}=–4; x_{33}=12.

Из сказанного можно сделать очень интересный и важный вывод: последние три столбца матрицы (3) образуют искомую матрицу X.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -5 & 1 & -4 \\ 10 & -3 & 12 \end{pmatrix}.$$

Введем ряд новых определений.

Нулевой матрицей называется матрица, у которой все элементы – нули. Очевидно равенство **A** + (–1)**A** = 0. Здесь в правой части через 0 обозначена нулевая матрица той же размерности, что и матрица **A**.

Квадратная матрица размера n называется **единичной**, если все её элементы, стоящие на главной диагонали, равны единице, а все остальные – нули. Единичную матрицу можно определить формулами:

$$a_{ij} = 1 \text{ при } i = j;$$
$$a_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j.$$

Очевидно, что первые три столбца матрицы (3) образуют единичную матрицу.

Единичная матрица, как правило, обозначается буквой **E**:

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & K & 0 \\ 0 & 1 & 0 & K & 0 \\ 0 & 0 & 1 & K & 0 \\ K & K & K & K & K \\ 0 & 0 & 0 & K & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко проверить справедливость равенств: **EA** = **AE** = **A**. Здесь **A** – квадратная матрица, и размеры **A** и **E** одинаковы.

Пусть **A** – квадратная матрица. **Обратной матрицей** к матрице **A** называется такая матрица $\mathbf{A}^{-1}$, для которой справедливы равенства:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Очевидно, что $\mathbf{A}^{-1}$ – квадратная матрица того же размера, что и матрица **A**. Сразу заметим, что **не всякая квадратная матрица имеет обратную матрицу**.

Поставим задачу: найти обратную матрицу к матрице

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Условие

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{-1},$$

сводится к трём системам уравнений, которые будем решать одновременно, используя метод Жордана-Гаусса. Матрица, представляющая расширенные матрицы всех трёх систем, примет вид

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Подвергая её преобразованиям по методу Жордана-Гаусса, последовательно будем получать:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 7 & -9 & 5 \\ 0 & 8 & 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

Как и в предыдущем примере, можно сказать, что три последних столбца образуют искомую матрицу, то есть

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{8} & -\frac{9}{8} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -\frac{3}{8} & \frac{5}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}.$$

Теперь сформулируем правило, по которому находится матрица, обратная к квадратной матрице **A** размера n.

Нужно выписать матрицу размерности $n \times 2n$, первые n столбцов которой образованы матрицей **A**, а последние n столбцов образуют единичную матрицу **E**. Построенная таким образом матрица преобразуется по методу Жордана-Гаусса так, чтобы на месте матрицы **A** получилась единичная матрица, если это возможно. Тогда на месте матрицы **E** получается матрица $\mathbf{A}^{-1}$.

Если матрицу A нельзя методом Жордана-Гаусса преобразовать к единичной матрице, то $\mathbf{A}^{-1}$ не существует. Так матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

не имеет обратной. Читатель может в этом убедиться самостоятельно.

Занятие 6. Определители

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}.$$

Найдем x_1 следующим образом: чтобы исключить x_2, умножим первое уравнение на a_{22} и из полученного уравнения вычтем второе, умноженное на a_{12}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}. \qquad (1)$$

Обозначим $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, $\Delta_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12}$.

Для определения x_2 поступим так: умножим второе уравнение на a_{11} и из полученного уравнения вычтем первое, умноженное на a_{21}:

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1. \qquad (2)$$

Обозначим $\Delta_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1$.

Из (1) и (2) видно, что если $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение[1], определяемое формулой

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2. \qquad (3)$$

Величина Δ называется **определителем матрицы второго порядка**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Вообще **определителем произвольной матрицы второго порядка** $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$ называется число, которое обозначается $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ и равно произведению двух чисел, стоящих на главной диагонали минус произведение двух чисел, стоящих на другой диагонали: $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 8 = -23.$$

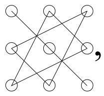
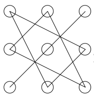
Из сказанного следует, что величины Δ_1 и Δ_2 в (3) тоже являются определителями:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим теперь систему трех линейных уравнений с тремя неизвестными:

[1] Если говорить строго, то из (1) и (2) следует, что если решение существует, то оно единственным образом выражается через коэффициенты системы и свободные члены. Чтобы доказать существование, надо подставить две формулы (3) в систему и убедиться в том, что оба уравнения обращаются в верные равенства.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}. \qquad (4)$$

Введем определение. Определителем произвольной квадратной матрицы третьего порядка $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ называется сумма шести слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение трех элементов матрицы, выбираемых по следующему правилу: три произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах двух треугольников: , берутся со знаком "+", а три произведения элементов, стоящих на второй диагонали и в вершинах двух других треугольников: , берутся со знаком "–". Определитель третьего порядка обозначается так:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-2) \cdot 9 + 3 \cdot 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \cdot 5 - (-1) \cdot 3 \cdot 9 - 4 \cdot 3 \cdot 2 =$$

$$= -36 + 18 - 20 + 20 + 27 - 24 = -15$$

Решая систему (4), например методом Гаусса, можно получить равенства

$$\Delta \cdot x_1 = \Delta_1;\ \Delta \cdot x_2 = \Delta_2;\ \Delta \cdot x_3 = \Delta_3, \qquad (5)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Из формул (5) видно, что если $\Delta \neq 0$, то единственным образом определяется решение системы:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,2,3.$$

Решая квадратные системы линейных уравнений 4-го, 5-го или любого более высокого порядка, можно получить формулы, аналогичные формулам (1), (2) или (5).

Дадим определение **определителя**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

квадратной матрицы *n*-го порядка или просто **определителя *n*-го порядка**. (В дальнейшем, принимая во внимание введённое обозначение, под элементами, строками и столбцами определителя матрицы будем подразумевать элементы, строки и столбцы этой матрицы.)

Сформулируем понятие $n!$ (читается *эн факториал*): **если n – натуральное (целое положительное) число, то $n!$ – это произведение всех натуральных чисел от** 1 **до** n.

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1)\, n.$$

Например,

$$5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Замечание: в некоторых книгах вместо термина "определитель" используется термин "детерминант" и определитель матрицы **A** обозначается det**A**.

Определителем n-го порядка называется сумма $n!$ слагаемых. Каждое слагаемое представляет собой произведение n элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца определителя[2] . (Произведения отличаются одно от другого набором элементов.) **Перед каждым произведением ставится знак "+" или "−"**. Покажем, как определить, какой нужно ставить знак перед произведением.

Так как в каждом произведении присутствует один элемент из 1-й строки, один элемент из 2-ой и т.д., то произведение в общем виде можно записать так:

$$a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \ldots \cdot a_{ns}.$$

---

[2] Попробуйте доказать сами, что таких произведений, отличающихся одно от другого набором элементов существует ровно n!

Здесь $i, j, k, \ldots, s$ – номера столбцов, в которых стоят элементы, выбранные из 1-й, 2-й, 3-й, ... n-й строк, соответственно. Ясно из сказанного выше, что каждое из чисел $i, j, k, \ldots, s$ равно какому-либо из чисел 1, 2, ..., n, и что все числа $i, j, k, \ldots, s$ – различные.

Расположенные в данном порядке

$$i, j, k, \ldots, s,$$

эти числа образуют **"перестановку"** из чисел 1, 2, ..., n (**перестановкой называется заданный порядок в конечном множестве**).

Взаимное расположение двух чисел в перестановке, когда большее стоит впереди меньшего называется **инверсией**. Например, в перестановке 3, 1, 2, 5, 4 три инверсии; в перестановке 2, 6, 3, 1, 4, 5 – шесть инверсий.

Перестановка называется **четной**, если в ней четное число инверсий и **нечетной**, если число инверсий нечетное.

Теперь можно сформулировать правило: **произведение** $a_{1i} \cdot a_{2j} \cdot a_{3k} \cdot \ldots \cdot a_{ns}$ **берется со знаком "+", если вторые индексы образуют четную перестановку, и со знаком "−", если нечетную.**

Из определения определителя можно вывести следующие его свойства.

1. Если поменять местами две строки определителя (два столбца), то получим новый определитель, равный исходному, умноженному на -1**.**

2. Определитель, имеющий две равных строки (два равных столбца), равен нулю.

3. Если одну из строк определителя умножить на какое-либо число, то получится определитель, равный исходному, умноженному на это число.

4. Определитель транспонированной[3] матрицы равен определителю исходной матрицы.

5. Если в определителе вместо любой строки записать сумму этой строки и любой другой строки, умноженной на некоторое число, то полученный новый определитель будет равен исходному.

До сих пор было показано, как вычислять определитель второго и третьего порядков. Чтобы вычислить определитель более высоких порядков, пользуются формулой Лапласа разложения определителя по строке или столбцу:

$$\det\mathbf{A} = a_{i1}(-1)^{i+1}M_{i1} + a_{i2}(-1)^{i+2}M_{i2} + \ldots + a_{in}(-1)^{i+n}M_{in} =$$

$$= a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j} + a_{2j}(-1)^{2+j}M_{2j} + \ldots + a_{nj}(-1)^{n+j}M_{nj}$$

Здесь i и j — любые числа от 1 до n. Последняя формула представляет собой разложение определителя по i-й строке или j-му столбцу. M_{ij} называется **минором** и равняется определителю порядка $n-1$, который получается из определителя $\det\mathbf{A}$,

---

[3] i-я строка исходной матрицы $\mathbf{A}$, имеющей m строк, является i-м столбцом транспонированной матрицы $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ $(i = 1, 2, \ldots m)$. Например,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \mathrm{A}^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Операцию транспонирования матрицы можно назвать поворотом на 180° вокруг главной диагонали.

если вычеркнуть i-ю строку и j-й столбец. Произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$ обозначается A_{ij} и называется **алгебраическим дополнением элемента** a_{ij}.

Пусть Δ – определитель четвертого порядка: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -2 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. Представим его разложение по второй строке:

$$\Delta = 2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -3 & -2 & 5 \\ 6 & 8 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 0,$$

и по второму столбцу:

$$\Delta = 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 1(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-2)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + 8(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Аналогичным образом можно вычислить Δ, разлагая его по первой, третьей, четвертой строке или по первому, второму или четвертому столбцу.

Вычисление определителя четвертого порядка сводится в худшем случае (если среди элементов нет нулей) к вычислению четырех определителей третьего порядка.

Аналогичным образом вычисление определителя 5-го порядка сводится к вычислению 5-ти определителей 4-го порядка и т.д.

Для того, чтобы получить представление о том, что такое определитель n-го порядка, не прибегая к определению на предыдущей странице, можно поступить так: выучить, как вычисляются определители 2-го и 3-го порядков и как по методу Лапласа сводить вычисление определителя n-го порядка к вычислению определителя n – 1-го порядка. Тогда становится понятным, как вычислять определитель 4-го порядка, затем 5-го порядка и т. д.

Из сказанного следует, что вычисление определителя 5-го порядка можно в общем случае свести к вычислению 20-ти(!) определителей 3-го порядка, что очень затрудняет задачу.

Вычисление определителя упрощается, если воспользоваться свойством 5. Пусть Δ – определитель четвертого порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 6 \\ -2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

Этот определитель разложим по третьей строке, так как там есть нуль и, что особенно важно, –1. Задача заключается в таком преобразовании определителя Δ, чтобы получить нули на месте a_{31} и a_{33}. К первому столбцу прибавим второй столбец, умноженный на –2, а к третьему столбцу прибавим второй столбец, умноженный на –3. Второй столбец, с помощью которого проводились преобразования, остается без изменений.

Таким образом вычисление определителя 4-го порядка сведено к вычислению только одного определителя 3-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 3 & 5 & 5 \\ -1 & 2 & 7 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 11 & 7 \end{vmatrix} = 1(-1)^{3+2} \begin{vmatrix} -4 & 5 & 5 \\ -1 & 7 & 6 \\ -2 & 11 & 7 \end{vmatrix}.$$

Пусть теперь Δ — определитель 5-го порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 9 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & 8 & -6 \\ 3 & 7 & -5 & 9 & 3 \\ 4 & -6 & -9 & 11 & 7 \\ 5 & 8 & 7 & 6 & -4 \end{vmatrix}.$$

Предположим, что мы решили разложить его по первому столбцу. Можно поступить следующим образом. Оставим первую строку без изменений. Вторую строку умножим на 3 и прибавим к ней первую, умноженную на –2. При этом обязательно за знак определителя выносится множитель $\frac{1}{3}$ (см. свойство 3). Вместо третьей строки пишем сумму третьей и умноженной на –1 первой. Четвертую строку умножаем на 3 и прибавляем первую, умноженную на –4, опять вынося множитель $\frac{1}{3}$ за знак определителя. Пятую строку умножаем на 3, прибавляем к ней первую, умноженную на –5 и опять выносим $\frac{1}{3}$ за знак определителя. Теперь получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \\ 0 & . & . & . & . \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}.$$

Теперь вычисление определителя 5-го порядка сведено к вычислению только одного определителя 4-го порядка.

Таким образом, пользуясь свойствами определителя и методом Лапласа, можно вычисление определителя *n*-го порядка свести к вычислению лишь одного определителя порядка *n* – 1.

Занятия 7-8. Вычисление обратной матрицы

Пусть **A** = (a_{ij}) – квадратная матрица с определителем, не равным нулю. Тогда существует обратная матрица $\mathbf{A}^{-1}$, которая вычисляется по формуле

$$\mathbf{A}^{-1}=\left(c_{ij}\right)=\left(\frac{A_{ji}}{\det \mathrm{A}}\right).$$

Последняя формула означает, что **в *i*-й строке и *j*-м столбце** обратной матрицы располагается алгебраическое дополнение элемента, стоящего **в *j*-й строке и в *i*-м** столбце исходной матрицы, деленное на определитель исходной матрицы.

Напомним здесь, что $A_{pq} = (-1)^{p+q}M_{pq}$, где M_{pq} называется минором и представляет собой определитель, получающийся из определителя det**A** вычеркиванием p-й строки и q-го столбца.

Рассмотрим пример:

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \det\mathbf{A} = 20 + 6 - 24 = 2;$$

$$\begin{matrix} A_{11}=20, & A_{12}=-9, & A_{13}=-15, \\ A_{21}=-8, & A_{22}=4, & A_{23}=6, \\ A_{31}=2, & A_{32}=-1, & A_{33}=-1; \end{matrix} \qquad \mathbf{A}^{-1}=\begin{pmatrix} 10 & -4 & 1 \\ -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{15}{2} & 3 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Еще раз подчеркнем, что обратная матрица существует только для квадратной матрицы с определителем, отличным от нуля!

§6. Правило Крамера решения квадратных систем линейных уравнений.

Пусть мы имеем квадратную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Ее можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B},$$

где

$$\mathbf{A} = \left(a_{ij}\right) i, j = 1,2,\ldots,n; \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Если определитель матрицы А не равен нулю, то система имеет единственное решение, определяемое формулами:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} \\ x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} \\ \ldots \quad \ldots \\ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta} \end{cases}.$$

Здесь Δ_i – определитель n-го порядка, получающийся из определителя Δ матрицы **A** коэффициентов системы заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Например,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3; \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -17; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -8;$$

$$x_1 = \frac{16}{17}; \quad x_2 = -\frac{3}{17}; \quad x_3 = \frac{8}{17}.$$

Отметим, что если определитель матрицы А коэффициентов квадратной системы линейных уравнений равен нулю, то возможен один из двух случаев: либо система несовместна, либо она совместна и неопределенна.

n-мерное векторное пространство

Выше было введено определение n-мерного вектора, как упорядоченного множество n чисел

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Числа $a_1,\ldots,a_n$ называются компонентами вектора. Два вектора называются равными, если у них на одинаковых местах стоят одинаковые компоненты (здесь есть некоторое повторение материала лекции 2). Напомним, что вектор можно записать в виде строки:

$$\boldsymbol{\alpha}^T = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Суммой двух векторов $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ называется вектор $\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix}$.

Роль нуля играет нулевой вектор $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Противоположным вектору (1) называется вектор $-\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \vdots \\ -a_n \end{pmatrix}$. Отметим, что для сложения векторов существует противоположная операция – вычитания.

Произведением вектора (1) на число m называется вектор $m\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} ma_1 \\ ma_2 \\ \vdots \\ ma_n \end{pmatrix}$

Вектор $\boldsymbol{\beta}$ называется пропорциональным вектору $\boldsymbol{\alpha}$, если существует такое число m, что $\boldsymbol{\beta} = m\boldsymbol{\alpha}$.

Из правил сложения векторов и умножения вектора на число вытекают важные свойства, которые легко доказываются:

1) $m(\boldsymbol{\alpha} \pm \boldsymbol{\beta}) = m\boldsymbol{\alpha} \pm m\boldsymbol{\beta}$; 2) $(m \pm l)\boldsymbol{\alpha} = m\boldsymbol{\alpha} \pm l\boldsymbol{\alpha}$;

3) $m(l\boldsymbol{\alpha}) = (ml)\boldsymbol{\alpha}$; 4) $1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$;

5) $0 \cdot \boldsymbol{\alpha} = 0$; 6) $-1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = -\boldsymbol{\alpha}$;

7) $m \cdot 0 = 0$;   8) если $m\boldsymbol{\alpha} = 0$, то или $m = 0$, или $\boldsymbol{\alpha} = 0$.

Совокупность всех n-мерных векторов, рассматриваемая с определёнными в ней операциями сложения векторов и умножения вектора на число, называется n–мерным векторным пространством.

Геометрический смысл сложения и умножения на число двумерных и трёхмерных векторов.

Вектор $\boldsymbol{\beta}$ называется линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$, если существуют такие числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$, что

$$\boldsymbol{\beta} = m_1\boldsymbol{\alpha}_1 + m_2\boldsymbol{\alpha}_2 \ldots + m_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

Линейной оболочкой $\langle \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ системы векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ называется множество всех линейных комбинаций этой системы векторов.

Система векторов $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$ называется линейно зависимой, если найдутся такие числа $m_1, m_2, \ldots, m_n$, хотя бы одно из которых не равно нулю, что имеет место равенство

$$m_1\boldsymbol{\alpha}_1 + m_2\boldsymbol{\alpha}_2 \ldots + m_n\boldsymbol{\alpha}_n = 0.$$

Очень просто доказываются следующие теоремы.

1. Для того, чтобы система векторов была линейно зависимой, **необходимо и достаточно**, чтобы хотя бы один из векторов системы представлял собой линейную комбинацию других векторов системы.
2. Если система содержит нулевой вектор, то она линейно зависима.
3. Если система векторов содержит два пропорциональных вектора, то она линейно зависима.
4. Если некоторая подсистема системы векторов линейно зависима, то и система линейно зависима.

Теорема. Система из m векторов n-мерного векторного пространства при $m > n$ линейно зависима.

Доказательство. В силу свойства 4 для доказательства теоремы достаточно рассмотреть случай $m = n + 1$. Доказательство проведём по индукции. Пусть $\boldsymbol{\alpha}_1$ и $\boldsymbol{\alpha}_2$ – два одномерных вектора, причём $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_1)$ и $\boldsymbol{\alpha}_2 = (a_2)$. Если a_1 и a_2 не равны нулю, то всегда найдутся отличные от нуля числа l_1 и l_2 такие, что $l_1a_1 + l_2a_2 = 0$.

Случай равенства нулю одного из чисел a_1, a_2 или их обоих столь же прост. Таким образом, при $n = 1$ утверждение теоремы справедливо.

Покажем теперь, что из справедливости теоремы для системы из n $(n-1)$-мерных векторов следует её справедливость для системы из $n+1$ nмерных векторов. Пусть имеется система

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n+1} \qquad (2)$$

n-мерных векторов. Если последние координаты всех векторов системы (2) равны нулю, то вектора системы можно рассматривать как $(n-1)$-мерные. Система (2) таких векторов по предположению индукции линейно зависима. Допустим, что хотя бы у одного вектора системы (2), например, вектора $\boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ последняя координата отлична от нуля. Тогда можно составить систему из n векторов $\boldsymbol{\beta}_i = \boldsymbol{\alpha}_i + d_i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, имеющих последнюю координату, равную нулю, то есть систему, которую можно рассматривать как $(n-1)$-мерную, и следовательно, линейно зависимую. Это значит, что найдётся такое множество чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не все из которых равны нулю, что имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{\beta}_i = 0$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left(\boldsymbol{\alpha}_i + d_i \boldsymbol{\alpha}_{n+1}\right) = 0$$

Таким образом, система векторов (2) линейно зависима, и утверждение теоремы доказано.

Линейно независимая система n-мерных векторов

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \qquad (3)$$

называется **максимальной линейно независимой системой**, если добавление к ней любого n- мерного вектора $\boldsymbol{\beta}$ даёт линейно зависимую систему. Если (3) – максимальная линейно независимая система, то во всякой линейной комбинации векторов $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$, равной нулю, коэффициент при векторе $\boldsymbol{\beta}$ должен отличаться от нуля(!), и вектор $\boldsymbol{\beta}$ можно представить в виде линейной комбинации векторов $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n$. Отсюда следует, что система nмерных векторов тогда и только тогда будет максимальной линейно независимой системой, если её векторы линейно независимы, а любой n-мерный вектор является линейной комбинацией этих векторов.

Теперь можно сделать заключение. В n-мерном пространстве всякая линейно независимая система, состоящая из n векторов, будет максимальной, а любая максимальная линейно независимая система векторов этого пространства состоит не более чем из n векторов.

Всякая линейно независимая система n-мерных векторов содержится хотя бы в одной максимальной линейно независимой системе. Действительно, если заданная система векторов не максимальна, то к ней можно присоединить один вектор так, что полученная система останется линейно независимой. Если новая система не максимальна, то к ней можно добавить ещё один вектор. Этот процесс может продолжаться до тех пор, пока в системе не будет n векторов.

Отсюда следует, что всякий ненулевой вектор содержится в некоторой максимальной линейно независимой системе, то есть в n-мерном векторном пространстве существует бесконечно много различных максимально независимых систем векторов.

Рассмотрим следующую систему n-мерных векторов

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1{}^T &= (1,0,0,\ldots,0) \\ \mathbf{e}_2{}^T &= (0,1,0,\ldots,0) \\ &\ldots \\ \mathbf{e}_n{}^T &= (0,0,0,\ldots,1) \end{aligned} \qquad (*)$$

Такие вектора называются единичными векторами линейного пространства. Очевидно, система (*) является максимальной линейно независимой (доказать!). Покажем, что в n-мерном пространстве существует бесконечно много максимальных линейно независимых систем векторов и что все они состоят из n векторов.

Если вектор $\boldsymbol{\beta}$ является линейной комбинацией векторов

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_n \qquad (4)$$

то будем говорить, что $\boldsymbol{\beta}$ линейно выражается через систему (4).

Система векторов (4) линейно выражается через систему

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s, \qquad (5)$$

если каждый вектор $\boldsymbol{\alpha}_i$ может быть представлен как линейная комбинация векторов системы (5).

Легко показать, что если система (4) линейно выражается через систему (5), а система (5) линейно выражается через систему

$$\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \ldots, \boldsymbol{\gamma}_t \qquad (6)$$

то система (4) будет линейно выражаться через систему (6).

Две системы называются эквивалентными, если каждая из них линейно выражается через другую.

Очевидна справедливость утверждения: если две системы векторов эквиваленты и если некоторый вектор линейно выражается через одну из них, то он линейно выражается и через другую (доказать!).

Теорема. **Если в *n*-мерном векторном пространстве даны две системы векторов (4) и (5), из которых первая линейно независима и линейно выражается через вторую, то число векторов в первой системе не больше, чем во второй**.

Доказательство. Пусть $n > s$, и выражение первой системы через вторую имеет вид:

$$\begin{array}{l}
\boldsymbol{\alpha}_1 = c_{11}\boldsymbol{\beta}_1 + c_{12}\boldsymbol{\beta}_2 + \ldots + c_{1s}\boldsymbol{\beta}_s \\
\boldsymbol{\alpha}_2 = c_{21}\boldsymbol{\beta}_1 + c_{22}\boldsymbol{\beta}_2 + \ldots + c_{2s}\boldsymbol{\beta}_s \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots + \ldots \\
\boldsymbol{\alpha}_n = c_{n1}\boldsymbol{\beta}_1 + c_{n2}\boldsymbol{\beta}_2 + \ldots + c_{ns}\boldsymbol{\beta}_s
\end{array}$$

Рассмотрим систему s-мерных векторов

$$\begin{array}{l}
\mathbf{c}_1^T = (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1s}) \\
\mathbf{c}_2^T = (c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2s}) \\
\ldots \ldots \ldots \\
\mathbf{c}_n^T = (c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{ns})
\end{array}$$

Так как $n > s$, из доказанного выше следует, что система $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n$ линейно зависима, то есть найдутся такие числа $l_1, l_2, \ldots, l_n$, не все равные нулю, что выполняется равенство

$$l_1\mathbf{c}_1 + l_2\mathbf{c}_2 + \ldots + l_n\mathbf{c}_n = 0 \qquad (7)$$

Это равенство можно расписать в координатах:

$$\begin{array}{rcl} l_1 c_{11} + l_2 c_{21} + \ldots + l_n c_{n1} & = & 0 \\ l_1 c_{12} + l_2 c_{22} + \ldots + l_n c_{n2} & = & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l_1 c_{1s} + l_2 c_{2s} + \ldots + l_n c_{ns} & = & 0 \end{array} \qquad (7^*)$$

Рассмотрим теперь линейную комбинацию

$$l_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + l_2 \boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + l_n \boldsymbol{\alpha}_n \qquad (8)$$

Она равна

$$\begin{array}{rl} & l_1 (c_{11} \boldsymbol{\beta}_1 + c_{12} \boldsymbol{\beta}_2 + \ldots + c_{1s} \boldsymbol{\beta}_s) + \\ + & l_2 (c_{21} \boldsymbol{\beta}_1 + c_{22} \boldsymbol{\beta}_2 + \ldots + c_{2s} \boldsymbol{\beta}_s) + \\ & \ldots \\ + & l_n (c_{n1} \boldsymbol{\beta}_1 + c_{n2} \boldsymbol{\beta}_2 + \ldots + c_{ns} \boldsymbol{\beta}_s) = \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} = & \boldsymbol{\beta}_1 (l_1 c_{11} + l_2 c_{21} + \ldots + l_n c_{n1}) + \\ + & \boldsymbol{\beta}_2 (l_1 c_{12} + l_2 c_{22} + \ldots + l_n c_{n2}) + \\ \ldots & \ldots \\ + & \boldsymbol{\beta}_s (l_1 c_{1s} + l_2 c_{2s} + \ldots + l_n c_{ns}) = 0 \end{array}$$

Последнее равенство следует из (7^*). Из него в свою очередь следует линейная зависимость системы (4), что противоречит условию теоремы. Таким образом, доказано, что утверждение теоремы верно. В дальнейшем эту теорему будем называть основной теоремой.

Из доказанной теоремы следует, что всякие две эквивалентные линейно независимые системы векторов содержат равное число векторов.

Любые две максимальные линейно независимые системы n-мерных векторов эквивалентны (доказать!). Они состоят, следовательно, из одинакового количества векторов, а так как существуют системы такого вида, состоящие из n векторов (например система (*)), то можно сделать важный вывод: любая максимальная линейно независимая система векторов n-мерного векторного пространства состоит из n векторов.

Теорема. Если в данной линейно зависимой системе векторов взяты две в ней максимальные линейно независимые подсистемы, то эти подсистемы содержат равное число векторов.

Справедливость теоремы следует из того, что всякая максимальная линейно независимая подсистема системы векторов эквивалентна самой системе, и по свойству транзитивности все максимальные линейно независимые подсистемы эквивалентны между собой. Следовательно, они содержат одинаковые числа векторов.

Теперь можно ввести определение. Число векторов, входящих в любую максимальную линейно независимую подсистему данной системы векторов, называется **рангом** системы.

Теорема. Пусть даны две системы n-мерных векторов:

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_r \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \ldots, \boldsymbol{\beta}_s, \tag{10}$$

не обязательно линейно независимые, причём ранг системы (9) равен числу k, ранг системы (10) – числу l. Если первая система линейно выражается через вторую, то $k \le l$. Если же эти системы эквивалентны, то $k = l$.

Пусть системы

$$\boldsymbol{\alpha}_{i_1}, \boldsymbol{\alpha}_{i_2}, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{i_k} \tag{11}$$

$$\boldsymbol{\beta}_{j_1}, \boldsymbol{\beta}_{j_2}, \ldots, \boldsymbol{\beta}_{j_l} \tag{12}$$

являются соответственно произвольными максимальными линейно независимыми подсистемами систем (9) и (10). Система (9) эквивалентна системе (11), а система (10) эквивалентна системе (12) Из того, что система (9) линейно выражается через систему (10) следует, что она линейно выражается через систему (12). Но из того, что (9) и (11) эквивалентны, следует, что (11) тоже линейно выражается через (12). Так как (11) линейно независима, из основной теоремы следует, что $k \le l$. Если эти системы эквивалентны, аналогичными рассуждениями можно показать, что $l \le k$. Этим доказывается второе утверждение теоремы.

Занятие 9. Ранг матрицы

Пусть дана матрица

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

имеющая n строк и m столбцов. Столбцы этой матрицы представляют собой систему из m n-мерных векторов. Ранг этой системы векторов называется рангом матрицы.

Выберем в матрице (1) произвольные k строк и столько же столбцов. Естественно считать, что $k \le min(m,n)$. Определитель, матрицы, стоящей на пересечении выбранных строк и столбцов будем называть минором k-го порядка матрицы **A**.

Очевидно, что если все миноры k-го порядка матрицы **A** равны нулю, то и все миноры более высоких порядков будут равны нулю. Это непосредственно следует из формулы разложения определителя по строке.

Теорема. Ранг матрицы равен наивысшему порядку отличного от нуля минора.

Доказательство. Пусть наивысший порядок отличного от нуля минора матрицы **A** (1) равен r. Перестановками строк и столбцов можно добиться того, что этот минор будет стоять в верхнем левом углу матрицы, которую обозначим $\mathbf{A}^*$. Очевидно, что если все миноры $(r + 1)$-го порядка у **A** равны нулю, то и у матрицы $\mathbf{A}^*$ такие миноры тоже будут равны нулю. Обозначим минор порядка r, стоящий в верхнем левом углу через M. Очевидно, что первые r столбцов матрицы линейно независимы. Если бы это было не так, то столбцы, составляющие минор M были бы линейно зависимы, и этот минор равнялся бы нулю.

Теперь осталось доказать, что любой k-й столбец матрицы при $r < k \le m$ будет линейной комбинацией первых r столбцов. Выберем произвольные числа i и j $(r < j \le n)$. Поменяем местами в матрице $\mathbf{A}^*$ $(r+1)$-ю строку с i-й и $(r+1)$-й столбец с j-м. Теперь минор M получился “окаймлённым” минором M_{ij}

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1j} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{ij} \end{vmatrix}$$

При любых i минор M_{ij} будет равен нулю. Например, если $r < i \le n$, то M_{ij} является минором порядка $r + 1$ матрицы **A**, и следовательно, по условию равен нулю. Если $i \le r$, то M_{ij} не является минором матрицы **A**, но он содержит две одинаковых строки, и поэтому равен нулю.

Разложим минор M_{ij}. по последней строке:

$$\mathrm{M}_{ij} = a_{i1}A_1 + a_{i2}A_2 + \ldots + a_{ir}A_r + a_{ij}\mathrm{M} = 0 \qquad (2)$$

Поскольку в последней формуле алгебраическое дополнение элемента a_{ik} не зависит от i, оно обозначено A_k. Поскольку $\mathrm{M} \neq 0$, из равенства (2) можно выразить элемент j-го столбца a_{ij} через элементы первых r столбцов i-й строки:

$$a_{ij} = -\frac{A_1}{\mathrm{M}}a_{i1} - \frac{A_2}{\mathrm{M}}a_{i2} - \ldots - \frac{A_r}{\mathrm{M}}a_{ir}$$

Это равенство справедливо при всех i ($i = 1,2,\ldots,r$), причём коэффициенты при a_{ik} от i не зависят. Отсюда следует, что i-й столбец матрицы будет линейной комбинацией её первых r столбцов. Таким образом, в системе столбцов матрицы **A** найдена максимальная линейно независимая подсистема, состоящая из r столбцов, то есть ранг матрицы **A** равен r.

Теперь для того, чтобы найти ранг системы векторов, достаточно составить матрицу, столбцами которой служат вектора системы, и найти минор максимального порядка, отличный от нуля. Порядок этого минора и будет рангом системы векторов.

Для определения ранга матрицы, как следует из доказательства последней теоремы, достаточно найти минор М из левого верхнего угла, отличный от нуля, и затем **методом окаймления** перебрать миноры порядка на единицу большего до обнаружения такого минора, отличного от нуля. Если таких миноров, отличных от нуля не оказалось, то ранг матрицы равен порядку минора М. Если такой минор, не равный нулю, нашелся, то процедуру расчёта окаймляющих миноров нужно продолжить.

Из доказанной теоремы следует, что ранг системы строк матрицы равен рангу системы столбцов.

Другое важное следствие теоремы состоит в том, что теперь можно утверждать: чтобы определитель *n*-го порядка равнялся нулю необходимо и достаточно, чтобы между его столбцами существовала линейная зависимость.

Достаточность условия здесь очевидна. Чтобы доказать необходимость, заметим, что наивысший порядок отличных от нуля миноров определителя меньше порядка самого определителя. Отсюда следует, что столбцы этой матрицы линейно зависимы.

Диагональная форма матрицы.

Две теоремы о ранге матрицы.

1. Ранг произведения двух матриц не выше ранга каждого из сомножителей.

Пусть имеются две матрицы **A** и **B**, которые можно перемножать и пусть **AB** = **C.** В i-й строке, и j-м столбце матрицы-произведения **C** стоит элемент c_{ij}, определяемый формулами:

при $i = 1$

$$c_{1j} = a_{11}b_{1j} + a_{12}b_{2j} + \ldots + a_{1n}b_{nj}$$

при $i = 2$

$$c_{2j} = a_{21}b_{1j} + a_{22}b_{2j} + \ldots + a_{2n}b_{1nj}$$

при произвольном i

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} \tag{9}$$

Здесь видно, что j-й столбец матрицы **C** представляет собой линейную комбинацию столбцов матрицы **A**, взятых с коэффициентами $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$. Отсюда следует, что система столбцов матрицы **C** линейно выражается через систему столбцов матрицы **A**, и ранг системы столбцов **C** не превышает ранга системы столбцов **A.**

Если теперь использовать формулу (9) для элементов произвольной строки матрицы **C**, то получится:

при $j = 1$

$$c_{i1} = a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \ldots + a_{in}b_{n1}$$

при $j = 2$

$$c_{i2} = a_{i1}b_{12} + a_{i2}b_{22} + \ldots + a_{in}b_{n2}$$

и так далее.

Отсюда видно, что система строк матрицы **C** является линейной комбинацией системы строк матрицы **B,** следовательно, ранг системы строк матрицы **C** не может превышать ранга системы строк матрицы **B,** и теорема доказана.

2. Ранг произведения произвольной матрицы **A** справа или слева на невырожденную квадратную матрицу **Q** равен рангу матрицы **A**.

Доказательство. Пусть

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{C} \qquad (**)$$

Из первой теоремы о ранге матрицы следует, что ранг матрицы **C** не выше ранга матрицы **A**. Если умножить обе части равенства (**) на $\mathbf{Q}^{-1}$ справа, получится равенство

$$\mathbf{AQ} = \mathbf{CQ}^{-1}$$

Из той же теоремы о ранге матрицы следует, что ранг **A** не выше ранга **C**. Отсюда следует, что ранги матриц **A** и **C** совпадают.

Теорема Кронекера-Капелли.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \ldots & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \ldots & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \ldots & + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \qquad (3)$$

Обозначим через **A** матриц у её коэффициентов и через $\mathbf{A}^*$ её расширенную матрицу.

Теорема. Для того, чтобы система линейных уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы её коэффициентов равнялся рангу расширенной матрицы.

Доказательство. Пусть система (3) совместна. Тогда существует набор чисел

$z_1, z_2, \ldots, z_n$, который будет решением системы. Если подставить этот набор чисел в систему, то получится выражение столбца свободных членов в виде линейной комбинации столбцов коэффициентов. Всякий другой столбец расширенной матрицы системы очевидно тоже можно представить в виде линейной комбинации матрицы коэффициентов. Очевидно, что и любой столбец матрицы коэффициентов системы можно представить в виде линейной комбинации столбцов расширенной матрицы. Таким образом, системы столбцов матрицы коэффициентов и столбцов расширенной матрицы эквивалентны. Это означает, что их ранги равны.

Пусть теперь ранги матрицы коэффициентов системы и расширенной матрицы системы (3) равны. Тогда некоторая максимальная линейно независимая система столбцов матрицы коэффициентов будет также максимальной линейно независимой системой столбцов расширенной матрицы. Отсюда следует, что столбец свободных членов может быть представлен в виде линейной комбинации столбцов матрицы коэффициентов. Набор коэффициентов этой линейной комбинации и будет решением рассматриваемой системы уравнений.

Занятия 10-11. Системы линейных однородных уравнений.

Рассмотрим однородную систему m уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1n}x_n & = 0 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 + & \ldots & + a_{2n}x_n & = 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 + & \ldots & + a_{mn}x_n & = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Эта система всегда совместна. Если матрица коэффициентов системы (4) имеет ранг r, равный n, то система имеет единственное решение, которое является нулевым. Если $r < n$, то система имеет решения, отличные от нулевого. Однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет только нулевое решение, если определитель матрицы коэффициентов системы отличен от нуля. Если этот определитель равен нулю, то такая система имеет бесконечное множество решений.

Если некоторый вектор $\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = (z_1\ z_2,\ldots,z_n)$ является решением системы (4), то при любом числе k вектор $k\mathbf{z}^{\mathrm{T}} = (kz_1,\ kz_2,\ldots,\ kz_n)$ также будет решением этой системы. Если несколько различных векторов являются решениями системы (4), то любая их линейная комбинация также будет решением этой системы. Очевидно, что система векторов, являющихся решениями системы (4), должна содержать максимальную линейно независимую систему, содержащую не более n векторов. Всякое решение системы уравнений (4) будет представлять собой линейную комбинацию векторов выбранной максимальной линейно независимой системы. Всякую максимальную линейно независимую систему решений однородной системы уравнений будем называть **фундаментальной системой решений**. n-мерный вектор тогда и только тогда является решением системы (4), если он является линейной комбинацией векторов данной фундаментальной системы.

Система (4) может обладать многими различными фундаментальными системами решений. Все эти системы эквивалентны между собой, и поэтому состоят из одного и того же числа решений.

Теорема. Если ранг r матрицы коэффициентов системы (4) меньше числа уравнений n, то всякая фундаментальная система решений системы уравнений (4) состоит из $n - r$ решений.

Доказательство. Рассмотрим произвольный, отличный от нуля определитель порядка $n - r$:

$$d = \begin{vmatrix} c_{1,r+1} & c_{1,r+2} & \ldots & c_{1,n} \\ c_{2,r+1} & c_{2,r+2} & \ldots & c_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n-r,r+1} & c_{n-r,r+2} & \ldots & c_{n-r,n} \end{vmatrix}$$

Придадим свободным неизвестным системы значения из i-й строки определителя: $x_{r+1} = c_{i,r+1}$, $x_{r+2} = c_{i,r+2}, \ldots$, $x_n = c_{i,n}$. Тогда однозначно определятся значения базисных переменных x_1, x_2, …, x_r. Таким образом, можно получить определённое решение системы (4) $\boldsymbol{\alpha}_i^T = (c_{i1}, c_{i2}, \ldots, c_{ir}, c_{i,r+1}, c_{i,r+2}, \ldots, c_{in})$ Перебрав все строки определителя d, получим систему векторов

$$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-r}, \tag{5}$$

которая является фундаментальной системой решений системы (4). Чтобы это доказать, нужно, во-первых, доказать, что система (5) линейно независима, и во-вторых, что любое решение системы (4) можно представить в виде линейной комбинации системы векторов (5). Первое очевидно, так как матрица, составленная из векторов системы (5), имеет отличный от нуля минор порядка $n - r$, равный d.

Чтобы доказать второе, предположим, что вектор

$$\boldsymbol{\beta}^T = (b_1, b_2, \ldots, b_r, b_{r+1}, \ldots, b_n) \tag{6}$$

является некоторым решением системы (4). Обозначим $\boldsymbol{\alpha}_i^{*T}$, $i = 1,2,\ldots, n-r$ i-ю строку определителя d и $\boldsymbol{\beta}^{*T} = (b_{r+1}, b_{r+2}, \ldots, b_n)$. Система векторов

$$\boldsymbol{\alpha}_1^*, \boldsymbol{\alpha}_2^*, \ldots, \boldsymbol{\alpha}_{n-r}^*, \boldsymbol{\beta}^*$$

очевидно, линейно зависима (число векторов превышает размерность векторов), и существует набор чисел $k_1, k_2, \ldots, k_{n-r}$, что

$$\boldsymbol{\beta}^* = k_1\boldsymbol{\alpha}_1^* + k_2\boldsymbol{\alpha}_2^* + \ldots + k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r}^* \tag{7}$$

Теперь рассмотрим n-мерный вектор

$$\boldsymbol{\delta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r} - \boldsymbol{\beta}$$

Вектор $\boldsymbol{\delta}$ является решением системы (4). Из (7) следует, что в решении $\boldsymbol{\delta}$ все свободные переменные равны нулю. Однако, при всех свободных неизвестных, равных нулю, система (4) может иметь только нулевое решение, то есть $\boldsymbol{\delta} = 0$, откуда следует, что

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \ldots + k_{n-r}\boldsymbol{\alpha}_{n-r},$$

и теорема доказана.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 + & \ldots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 + & \ldots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 + & \ldots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases} \quad n \tag{8}$$

Очевидна справедливость двух выводов:

1. Сумма любого решения системы (4) с любым решением системы (8) будет решением системы (8).
2. Разность двух любых решений системы (8) является решением системы (4).

Отсюда следует теорема: любое решение системы (8) можно получить в виде суммы любого другого решения этой системы и линейной комбинации решений системы (4).

Раздел 2. Дифференциальное и интегральное исчисление функции одной переменной

Занятия 13-15. Основные понятия

Пусть *D* — некоторое множество чисел. Если задан закон, по которому каждому числу *x* из множества *D* ставится в соответствие единственное определенное число *y*, то будем говорить, что на множестве *D* задана функция, которую назовём *f*. Число *y* — это значение функции *f* в точке *x*, что обозначается формулой *y = f(x)*.

Число x называется аргументом функции, множество D — областью определения функции, а все значения y образуют множество E, которое называется множеством значений или областью изменения функции.

Функция f **называется возрастающей (убывающей) на множестве** G, **если для любых чисел** x_1 **и** x_2 **из множества** G, **таких что** $x_1 < x_2$, **выполняется условие** $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Так как между множеством действительных чисел и множеством точек числовой оси можно установить взаимно-однозначное соответствие, в дальнейшем изложении понятиям "число x" и "точка x числовой оси" в некоторых случаях будет придаваться один и тот же смысл. Например, вместо "значение функции при значении аргумента, равном x_1" будет говориться "значение функции в точке x_1". В нижеследующем определении можно везде заменить выражение "точка x" на выражение "число x".

Пусть ε — некоторое положительное число. **ε-окрестностью** точки x_0 называется множество всех точек x, принадлежащих промежутку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, кроме самой точки x_0. Принадлежность точки x ε-окрестности точки x_0 можно выразить с помощью двойного неравенства

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Число ε называется **радиусом окрестности**.

Предел и непрерывность функции

Рассмотрим функцию $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$. Значение функции в этой точке равно 4.

Отметим одну особенность поведения функции в этой точке. Можно

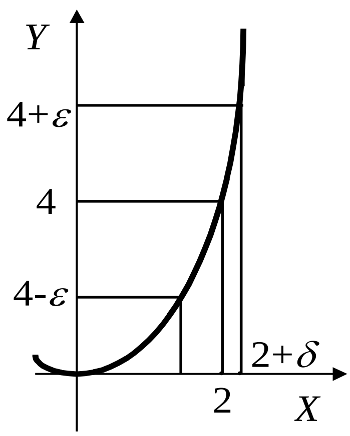


Рис. 1

выбрать какое-либо положительное число ε и построить ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Очевидно, что найдется такая окрестность точки $x_0 = 2$ (на рисунке 1 эта окрестность имеет радиус δ) , что если x будет лежать в этой окрестности, то соответствующее значение y, равное x^2, попадет в ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Это заключение справедливо для любого, сколь угодно малого числа ε. Здесь точка $x_0 = 2$ выбрана произвольно. Можно было бы для данной функции выбрать любую другую точку и сделать подобное заключение.

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{2x^2 - 5x\text{-}2}{x-2}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 2$. При $x_0 \neq 2$ её можно преобразовать:

$$y = \frac{2(x-2)(x-0{,}5)}{x-2} = 2x - 1.$$

График функции представлен на рисунке 2. Хотя исходная функция не определена в точке $x_0 = 2$ и естественно не равна 3 в этой точке, точка $y_0 = 3$ имеет характерную особенность. Выбрав положительное число ε, можно утверждать, что если рассматривать значения x, расположенные достаточно близко к точке $x_0 = 2$ (или лежащие в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$, причем радиус этой окрестности зависит от ε), то соответствующие значения y попадут в ε-окрестность точки $y_0 = 3$. Всё сказанное остаётся справедливым независимо от того, насколько малым выбрано положительное число ε.

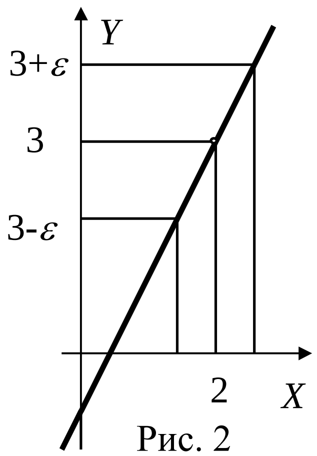


Рис. 2

Введем понятие предела функции. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 (иногда говорят, при x, стремящемся к x_0), если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения y попадают в ε-окрестность точки $y = A$.

Можно сформулировать определение предела функции по-другому. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

выполняется условие

$$|y - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, записывается формулой

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

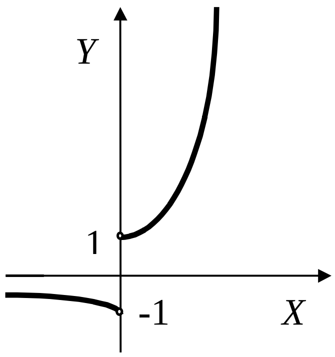


Рис. 3

Как видно из второго из рассмотренных выше примеров, для того, чтобы функция имела предел в точке $x = x_0$, не требуется, чтобы она была определена в этой точке.

Рассмотрим функцию $y = \frac{|x|}{x} 2^x$. Очевидно, что если $x > 0$, то $y = 2^x$; если $x < 0$, то $y = -2^x$; при $x = 0$ функция не определена.

График функции изображен на рисунке 3. Легко убедиться в том, что, согласно приведенному выше определению предела, эта функция в точке $x = 0$ предела не имеет.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = x_0$, если она определена в этой точке и ее значение $f(x_0)$ равно пределу функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$, как и во всех точках числовой оси. Функция $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ не является непрерывной в точке $x = 2$. Функция $y = \frac{|x|}{x} 2^x$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Функция, непрерывная в каждой точке открытого промежутка, называется **непрерывной на этом промежутке**.

Приведем свойства предела функции.

1. Функция не может иметь в одной точке два разных предела.

2. $\lim\limits_{x \to x_0} C = C$, если C — постоянная функция.

3. Если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и C — постоянная функция, то

$$\lim_{x \to x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \to x_0} f(x).$$

4. Если существуют $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, то существует $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x) + g(x))$, равный $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$, а также существует $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x)g(x))$, равный

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Если при этом $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)/g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Введем определения так называемых “односторонних пределов”.

Число B называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** a **справа** (это записывается в виде формулы $B = \lim\limits_{x\to a+} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что из из условия $0 < x - a < \delta$ будет следовать $|B - f(x)| < \varepsilon$.

Согласно приведенному определению $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt{x} = 0$. Отметим, что обыкновенного предела функция $y = \sqrt{x}$ в точке $x = 0$ не имеет.

Число C называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** b **слева** (это записывается в виде формулы $C = \lim\limits_{x\to b-} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что из условия $0 < b - x < \delta$ будет следовать $|C - f(x)| < \varepsilon$.

Очевидно, что функция $y(x) = \dfrac{|x|}{x} 2^x$ (её график, изображен на рисунке 3) имеет два односторонних предела в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+} y(x) = 1; \quad \lim_{x\to 0-} y(x) = -1.$$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке** a **справа** (непрерывной в точке b слева), если

$$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a) \quad (\lim_{x\to b-} f(x) = f(b)).$$

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке $x=0$.

Функция называется **непрерывной на замкнутом промежутке** $[a, b]$, если она непрерывна на открытом промежутке (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Достаточно просто можно доказать теорему, связывающую понятия предела функции в точке и односторонних пределов. Мы ограничимся только формулировкой теоремы.

Для того, чтобы выполнялось равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, **необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два равенства:**

$$\lim_{x\to x_0+} f(x)=A;\ \lim_{x\to x_0-} f(x)=A$$

В дальнейшем нам понадобятся понятия предела функции в бесконечно удалённых точках. Рассмотрим сначала функцию $f(x)$, определенную на полубесконечном промежутке $(x_0; \infty)$. **Число** A **называется пределом функции** $f(x)$ **при** x, **стремящемся к бесконечности**:

$$A=\lim_{x\to\infty} f(x),$$

если для любого положительного числа ε **можно найти такое положительное число** M (**зависящее от** ε), что **для всех чисел** x, **превосходящих** M, **выполняется условие**:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на полубесконечном промежутке $(-\infty; x_0)$. **Число** A **называется пределом функции** $f(x)$ **при** x, **стремящемся к минус бесконечности**:

$$A=\lim_{x\to-\infty} f(x),$$

если для любого положительного числа ε **можно найти такое положительное число** M (**зависящее от** ε), что **для всех чисел** x, **меньших, чем** $-M$, **выполняется условие**:

$$|f(x)-A|<\varepsilon.$$

Отметим два, так называемых, "замечательных предела".

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. Геометрический смысл этой формулы заключается в том, что прямая $y=x$ является касательной к графику функции $y=\sin x$ в точке $x=0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$. Здесь e — иррациональное число, приблизительно равное 2,72.

Приведем пример применения понятия предела функции в экономических расчетах. Рассмотрим обыкновенную финансовую сделку: предоставление в долг суммы S_0 с условием, что через период времени T будет возвращена сумма S_T. Определим величину r **относительного роста** формулой

$$r = \frac{S_T - S_0}{S_0}. \qquad (1)$$

Относительный рост можно выразить в процентах, умножив полученное значение r на 100.

Из формулы (1) легко определить величину S_T:

$S_T = S_0(1 + r)$

При расчете по долгосрочным кредитам, охватывающим несколько полных лет, используют схему сложных процентов. Она состоит в том, что если за 1-й год сумма S_0 возрастает в $(1 + r)$ раз, то за второй год в $(1 + r)$ раз возрастает сумма $S_1 = S_0(1 + r)$, то есть $S_2 = S_0(1 + r)^2$. Аналогично получается $S_3 = S_0(1 + r)^3$. Из приведенных примеров можно вывести общую формулу для вычисления роста суммы за n лет при расчете по схеме сложных процентов:

$S_n = S_0(1 + r)^n$.

В финансовых расчетах применяются схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются **годовая ставка** r и **количество начислений за год** k. Как правило, начисления производятся через равные промежутки времени, то есть длина каждого промежутка T_k составляет $\frac{1}{k}$ часть года. Тогда для срока в T лет (здесь T не обязательно является целым числом) сумма S_T рассчитывается по формуле

$$S_T = S_0\left(1 + \frac{r}{k}\right)^m \qquad (2)$$

Здесь $m = \left[\frac{T}{T_k}\right]$ — целая часть числа $\frac{T}{T_k}$, которая совпадает с самим числом, если, например, T - целое число.

Пусть годовая ставка равна r и производится n начислений в год через равные промежутки времени. Тогда за год сумма S_0 наращивается до величины, определяемой формулой

$$S_1 = S_0\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n \qquad (3)$$

В теоретическом анализе и в практике финансовой деятельности часто встречается понятие “непрерывно начисляемый процент”. Чтобы перейти к непрерывно начисляемому проценту, нужно в формулах (2) и (3) неограниченно увеличивать соответственно, числа k и n (то есть устремить k и n к бесконечности) и вычислить, к какому пределу будут стремиться функции S_T и S_1. Применим эту процедуру к формуле (3):

$$S_1^* = \lim_{n\to\infty} S_1 = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n = S_0 \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r = S_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right\}^r .$$

Заметим, что предел в фигурных скобках совпадает со вторым замечательным пределом. Отсюда следует, что при годовой ставке r при непрерывно начисляемом проценте сумма S_0 за 1 год наращивается до величины S_1^*, которая определяется из формулы

$$S_1^* = S_0 e^r. \tag{4}$$

Пусть теперь сумма S_0 предоставляется в долг с начислением процента n раз в год через равные промежутки времени. Обозначим r_e годовую ставку, при которой в конце года сумма S_0 наращивается до величины S_1^* из формулы (4). В этом случае будем говорить, что r_e — это **годовая ставка при начислении процента n раз в год, эквивалентная годовому проценту r при непрерывном начислении.** Из формулы (3) получаем

$$S_1^* = S_0\left(1+\frac{r_e}{n}\right)^n .$$

Приравнивая правые части последней формулы и формулы (4), полагая в последней $T = 1$, можно вывести соотношения между величинами r и r_e:

$$r = n\ln\left(1+\frac{r_e}{n}\right), \quad r_e = n\left(e^{\frac{r}{n}} - 1\right).$$

Эти формулы широко используются в финансовых расчётах.

Занятия 16-18. Производная

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки x. Пусть Δx – приращение аргумента в точке x. Обозначим через Δy или Δf приращение функции, равное $f(x+\Delta x) - f(x)$. Отметим здесь, что функция непрерывна в точке x, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δf.

Отношение $\Delta f/\Delta x$, как видно из рисунка 1, равно тангенсу угла α, который составляет секущая MN кривой $y = f(x)$ с положительным направлением горизонтальной оси координат.

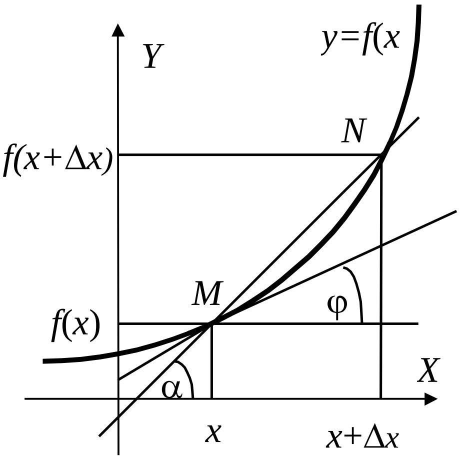


Рис. 1

Представим себе процесс, в котором величина Δx, неограниченно уменьшаясь, стремится к нулю. При этом точка N будет двигаться вдоль кривой $y = f(x)$, приближаясь к точке M, а секущая MN будет вращаться около точки M так, что при очень малых величинах Δx её угол наклона α будет сколь угодно близок к углу φ наклона касательной к кривой в точке x. Следует отметить, что все сказанное относится к случаю, когда график функции $y = f(x)$ не имеет излома или разрыва в точке x, то есть в этой точке можно провести касательную к графику функции.

Отношение $\Delta y / \Delta x$ или, что то же самое $(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$, можно рассматривать при заданном x как функцию аргумента Δx. Эта функция не определена в точке $\Delta x = 0$. Однако её предел в этой точке может существовать.

Если существует предел отношения $(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$ в точке $\Delta x = 0$, то он называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается y' или $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется **дифференцированием**.

Если для любого числа x из открытого промежутка (a, b) можно вычислить

$f'(x)$, то функция $f(x)$ называется **дифференцируемой на промежутке** $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$.

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции $f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Производная это скорость изменения функции в точке x. Из определения производной следует, что $f'(x) \approx \Delta f / \Delta x$, причем точность этого приближенного равенства тем выше, чем меньше Δx. Производная $f'(x)$ является приближенным коэффициентом пропорциональности между Δf и Δx.

Производная функции $f(x)$ не существует в тех точках, в которых функция не является непрерывной. В то же время функция может быть непрерывной в точке x_0, но не иметь в этой точке производной. Такую точку назовём угловой точкой графика функции или точкой излома. Графические примеры приведены на рисунке 2.

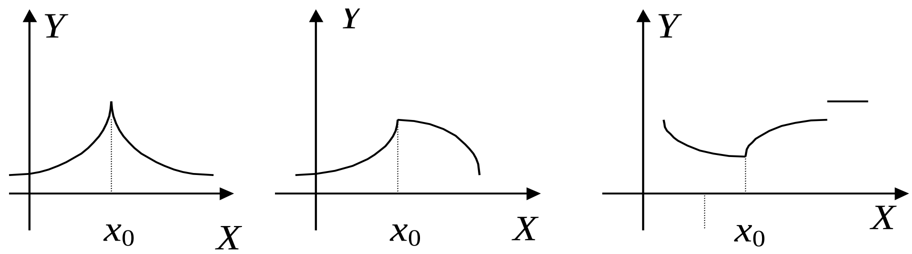


Рис. 2

Так функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, хотя является непрерывной в этой точке.

Ниже приводится таблица производных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
x	1	$\ln x$	$1/x$	$\mathrm{tg} x$	$1/\cos^2 x$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin a$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\log_a x$	$1/(x \ln a)$	$\arccos a$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$1/x$	$-1/x^2$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arctg} x$	$1/(1+x^2)$

Приведем теперь основные свойства производной.

1. Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

2. Если существует $f'(x)$, и C - произвольное число, то функция $Cf(x)$ имеет производную: $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

3. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то функция $S(x) = f(x) + g(x)$ имеет производную: $S'(x) = f'(x) + g'(x)$.

4. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то функция $P(x) = f(x)g(x)$ имеет производную: $P'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

5. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$ и при этом $g(x) \neq 0$, то функция $D(x) = f(x) / g(x)$ имеет производную: $D'(x) = (f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)) / g^2(x)$.

В любом курсе математического анализа доказывается теорема о **производной сложной функции**. Мы ограничимся лишь ее формулировкой.

Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке x, а функция $f(z)$ имеет производную в точке $z = g(x)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ имеет в точке x производную $F'(x) = f'(z)\, g'(x)$.

Приведем примеры вычисления производной сложной функции.

$$F(x) = \sin^2 x,\ F'(x) = 2\sin x \cos x = \sin 2x;$$
$$F(x) = \sin x^2,\ F'(x) = 2x\cos x^2;$$
$$F(x) = \ln\cos x, F'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\mathrm{tg}x;$$
$$F(x) = \cos\ln x, F'(x) = (-\sin\ln x)\frac{1}{x}.$$

Занятия 19-21. Дифференциал функции

Рассмотрим две функции: $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, которые имеют производные $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ в каждой точке некоторой области D. Возьмем какую-либо точку x из области D и дадим аргументу приращение Δx. Тогда функции получат соответственно приращения $\Delta y_1 = f_1(x + \Delta x) - f_1(x)$ и $\Delta y_2 = f_2(x + \Delta x) - f_2(x)$. Из графиков, изображенных на рисунке 3, видно, что в обоих случаях приращения Δy_1 и Δy_2 можно представить в виде сумм двух слагаемых:

$$\Delta y_1 = (C_1 - A_1) + (B_1 - C_1); \quad \Delta y_2 = (C_2 - A_2) + (B_2 - C_2) \qquad (1)$$

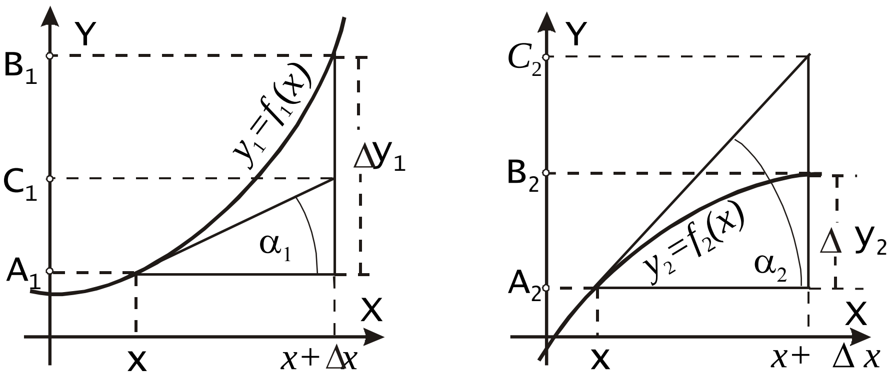


Рис.3

Первые слагаемые в правых частях обоих выражений (1) легко вычисляются из сходных формул: $C_1 - A_1 = \mathrm{tg}\alpha_1\,\Delta x = f_1{}'(x)\Delta x$; $C_2 - A_2 = \mathrm{tg}\alpha_2\,\Delta x = f_2{}'(x)\Delta x$.

Величина $f'(x)\,\Delta x$ называется главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x. (Здесь мы говорим только о функции, имеющей в точке x производную). Главная часть приращения функции линейна относительно приращения аргумента Δx (можно сказать – пропорциональна приращению Δx). Это означает, что если приращение аргумента Δx уменьшить в k раз, то и главная часть приращения функции уменьшится в k раз.

Формулы (1) можно переписать в виде:

$$\Delta y_1 = f_1{}'\Delta x + r_1;\quad \Delta y_2 = f_2{}'\Delta x + r_2. \qquad (2)$$

Здесь $r_1 = B_1 - C_1$; $r_2 = B_2 - C_2$.

Величины r_1 и r_2 в формулах (2) при уменьшении Δx в k раз уменьшаются более чем в k раз, что можно видеть, сравнивая рисунки 3 и 4, и говорят, что r_1 и r_2 стремятся к нулю быстрее, чем Δx .

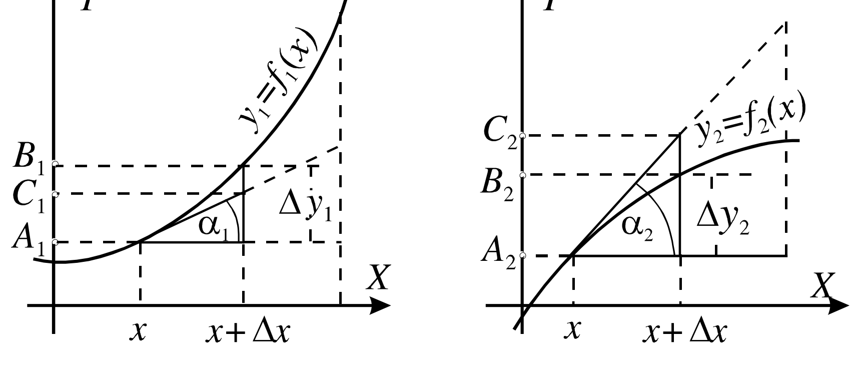


Рис. 4

Назовем функцию $\beta(z)$ **бесконечно малой** в точке $z = z_0$, если $\lim\limits_{z \to z_0} \beta(z) = 0$.

Пусть функции $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ являются бесконечно малыми в точке $z = z_0$.. Функция $\beta(z)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\gamma(z)$, если $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{\beta(z)}{\gamma(z)} = 0$.

Величины r_1 и r_2 в формулах (2) являются функциями аргумента Δx, бесконечно малыми в точке $\Delta x = 0$. Можно показать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{r_i(\Delta x)}{\Delta x} = 0;\ \ i = 1{,}2$. Это означает, что **функции** $r_1(\Delta x)$ **и** $r_2(\Delta x)$ **являются бесконечно малыми функциями более высокого порядка, чем** Δx, **в точке** $\Delta x = 0$.

Таким образом приращение функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке, в которой существует её производная, может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \beta(\Delta x),$$

где $\beta(\Delta x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx, в точке $\Delta x = \mathbf{0}$.

Главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции $y = f(x)$, равная $f'(x)\,\Delta x$, называется **дифференциалом** и обозначается dy:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \qquad (3)$$

Если сюда подставить функцию $f(x) = x$, то, так как $x' = 1$, формула (3) примет вид: $dx = \Delta x$. Эта формула легко истолковывается с помощью графика функции $y = x$, из которого видно, что приращение этой функции содержит лишь главную часть. Таким образом, для функции $y = x$ приращение совпадает с дифференциалом. Теперь формулу дифференциала (3) можно переписать так

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

то есть **производная функции** $f(x)$ **равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента** $\boldsymbol{x}$.

Очевидны следующие свойства дифференциала.

1. $dC = 0$ (здесь и в следующей формуле C — постоянная);

2. $d(Cf(x)) = Cdf(x)$;

3. Если существуют $df(x)$ и $dg(x)$, то $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$, $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$. Если при этом $g(x) \neq 0$, то $d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

Пусть $y = f(x)$ - функция, имеющая производную в точке x, тогда $dy = df(x) = f'(x)dx$. Если аргумент x является функцией $x(t)$ некоторой независимой переменной t, то $y = F(t) = f(x(t))$ сложная функция от t, и её дифференциал вычисляется по формуле $dy = F'(t)dt = f'(x)x'(t)dt$. Однако по определению дифференциала $x'(t)dt = dx$ и последняя формула преобразуется к виду: $dy = f'(x)dx$.

Таким образом если аргумент функции $y=f(x)$ рассматривать как функцию другого аргумента так, что равенство $\Delta x = dx$ не выполняется, формула дифференциала функции $f(x)$ остается неизменной. Это свойство принято называть свойством **инвариантности дифференциала**.

Занятия 22-23. Производные высших порядков.

Может оказаться что функция $f'(x)$, называемая первой производной, тоже имеет производную $(f'(x))'$. Эта производная называется **второй производной** функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Если f есть координата движущейся точки и является функцией времени, то мгновенная скорость точки в момент времени t равна $f'(t)$, а ускорение равно $f''(t)$.

Вторая производная также может быть функцией, определенной на некотором множестве. Если эта функция имеет производную, то эта производная называется **третьей производной** функции $f(x)$ и обозначается $f'''(x)$.

Если определена n-я производная $f^{(n)}(x)$ и существует её производная, то она называется $(n+1)$-й производной функции $f(x)$: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

Все производные, начиная со второй, называются **производными высших порядков.**

—

Формула Лагранжа

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$ и дифференцируема на открытом промежутке (a, b), то можно найти такую точку c, принадлежащую промежутку (a, b), для которой справедливо равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (1)$$

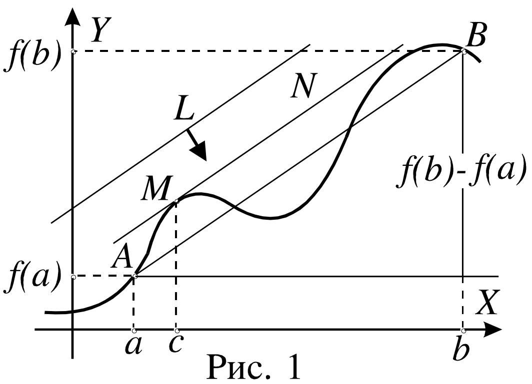


Рис. 1

Эта формула называется формулой конечных приращений Лагранжа. Проведем наглядное обоснование этой формулы. Возьмем на графике функции $f(x)$ точки $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$. Проведем через эти точки прямую AB. Проведем также прямую L, параллельную прямой AB, так, чтобы она не пересекала график функции $f(x)$ на промежутке (a, b). Сохраняя параллельность L и AB, будем "надвигать" прямую L

на график $f(x)$ до тех пор, пока прямая L не коснется графика $f(x)$ в некоторой точке c промежутка (a, b). Геометрическую точку касания обозначим буквой M, а через MN обозначим касательную к графику $f(x)$, параллельную прямой AB. Очевидно, угловые коэффициенты прямых MN и AB (то есть тангенсы углов наклона прямых к оси абсцисс) равны. Угловой коэффициент прямой MN равен $f'(c)$, а угловой коэффициент прямой AB равен ($f(b)$ □□$f(b)$)/(b-a), и справедлива формула:

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Отсюда сразу получается формула (1). На приведенном рисунке видно, что могут существовать другие точки, принадлежащие промежутку (a, b), в которых касательные к графику функции $f(x)$ параллельны прямой MN. Производную функции $f(x)$, вычисленную в любой из этих точек, можно подставить в правую часть формулы (1) вместо множителя $f'(c)$.

Сформулируем теорему о монотонности функции. **Если $f'(x) > 0$ на промежутке $(a;b)$, то на $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает. Если $f'(x) < 0$ на промежутке $(a;b)$, то на $(a;b)$ функция $f(x)$ убывает.**

Докажем эту теорему. Пусть t_1 и t_2 — любые числа из промежутка $(a;b)$, причем $t_2>t_1$. Тогда по теореме Лагранжа можно указать такое число c из промежутка $(t_1;t_2)$, для которого справедливо равенство $f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$. Если $f'(x) > 0$ для всех x из промежутка $(a;b)$, то $f'(c) > 0$, и из условия $t_2 > t_1$ следует, что $f(t_2) - f(t_1) > 0$. Таким образом, возрастание функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ доказано. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

Занятия 24-25. Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) > f(x_0).$$

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) < f(x_0).$$

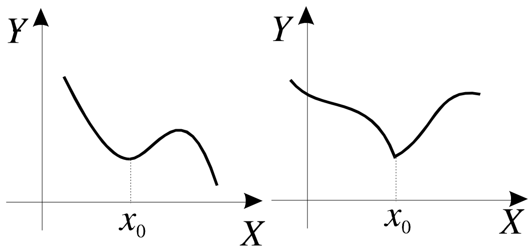


Рис.1
Примеры точек минимума.

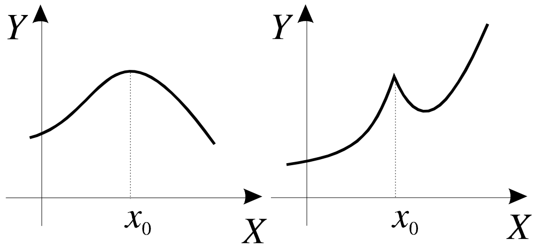


Рис. 2
Примеры точек максимума.

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Сформулируем теорему о необходимом условии экстремума функции: **если в точке экстремума функция** $f(x)$ **имеет производную, то производная равна нулю**.

Отсюда следует, что точки экстремума функции следует искать среди тех точек её области определения, где производная функции равна нулю или не существует.

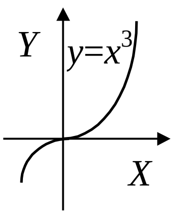


Рис. 3

Если $f'(x_0) = 0$, это еще не значит, что в точке x_0 есть экстремум. Примером может служить функция $y=x^3$. В точке $x=0$ её производная равна нулю, но экстремума функция не имеет. График функции изображен на рисунке 3.

Точка, в которой производная равна нулю, называется **стационарной**.

Точки области определения функции, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, называются **критическими**.

Как было показано выше, с помощью необходимого условия нельзя определить, является ли данная точка точкой экстремума, тем более указать, какой экстремум реализуется – максимум или минимум. Для того, чтобы ответить на эти вопросы, сформулируем и докажем теорему, которая называется **достаточным условием экстремума**.

Пусть функция $f(x)$ **непрерывна в точке** x_0. **Тогда**:

1) **если** $f'(x) < 0$ **на** $(a;x_0)$ **и** $f'(x) > 0$ **на** $(x_0;b)$, **то точка** x_0 – **точка минимума функции** $f(x)$;

2) **если** $f'(x) > 0$ **на** $(a;x_0)$ **и** $f'(x) < 0$ на $(x_0;b)$, **то точка** x_0 – **точка максимума функции** $f(x)$;

Докажем первое утверждение теоремы.

Так как $f'(x) < 0$ на $(a;x_0)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x)$ убывает на $(a;x_0]$, и для любого $x \in (a;x_0)$ выполняется условие $f(x)>f(x_0)$.

Так как $f'(x) > 0$ на $(x_0;b)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x)$ возрастает на $(x_0;b]$, и для любого $x \in (x_0;b)$ выполняется условие $f(x)>f(x_0)$.

В результате получается, что при любом $x \neq x_0$ из $(a;b)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, то есть точка x_0 – точка минимума $f(x)$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

Выпуклость и вогнутость функции

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка $(a;b)$. Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен выше любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **вогнутой** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вниз").

Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен ниже любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **выпуклой** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вверх").

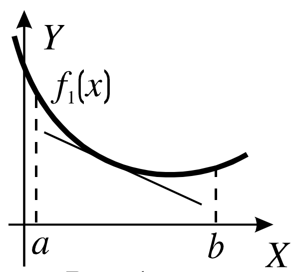


Рис.1
Функция $f_1(x)$ вогнута
на промежутке $(a;b)$

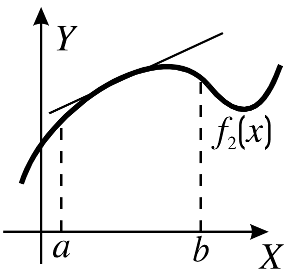


Рис. 2
Функция $f_1(x)$ выпукла
на промежутке $(a;b)$

Точка x_0 называется **точкой перегиба** функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет производную и существуют два промежутка: $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, на одном из которых функция выпукла, а на другом вогнута.

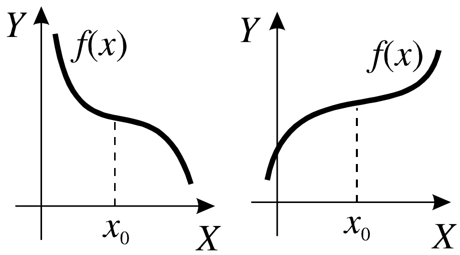


Рис. 3
Примеры точек перегиба.

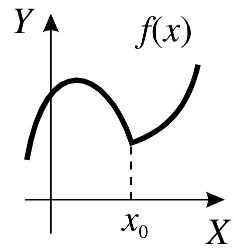


Рис..4
Угловая точка не является
точкой перегиба.

Будем называть функцию **возрастающей в точке** x_0, если она непрерывна в этой точке и возрастает в некоторой ее окрестности. Подобным образом можно определить функцию, убывающую в точке.

Приведем без доказательства важную для исследования функций теорему.

Если $f''(x) > 0$ **на промежутке** $(a;b)$, **то на этом промежутке функция** $f(x)$ **вогнута**. **Если** $f''(x) < 0$ **на промежутке** $(a;b)$, **то на этом промежутке функция** $f(x)$ **выпукла**.

Из положительности второй производной функции на промежутке следует возрастание первой производной на этом промежутке, а это, как показано на рисунке 5, – признак вогнутой функции. Аналогичным образом иллюстрируется второе утверждение теоремы.

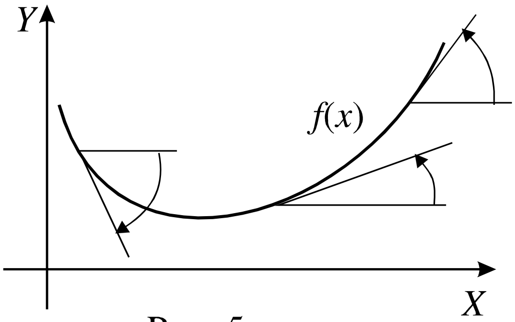


Рис. 5
Вогнутая функция.
Тангенс угла наклона
касательной возрастает.

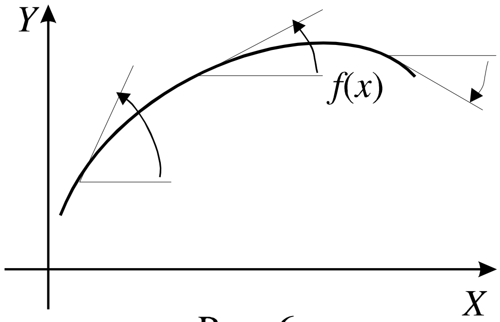


Рис. 6
Выпуклая функция.
Тангенс угла наклона
касательной убывает.

Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Приведем другую формулировку достаточных условий экстремума функции.

Если в точке x_0 выполняются условия:

1) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) < 0$, тогда x_0 – точка максимума;

2) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) > 0$, тогда x_0 – точка минимума;

3) $f'(x_0) = 0$**;** $f''(x_0) = 0$**,** тогда вопрос о поведении функции в точке остается открытым. Здесь может быть экстремум, например в точке $x_0 = 0$ у функции $y = x^4$, но может его не быть, например в точке $x_0 = 0$ у функции $y = x^5$. В этом случае для решения вопроса о наличии экстремума в стационарной точке можно использовать достаточные условия экстремума, приведенные выше.

Рассмотрим пример из микроэкономики.

В количественной теории полезности предполагается, что потребитель может дать количественную оценку (в некоторых единицах измерения) полезности любого количества потребляемого им товара.

Это означает существование **функции полезности** TU аргумента Q – количества купленного товара. Введём понятие **предельной полезности**, как добавочной полезности, прибавляемой каждой последней порцией товара. Далее построим двумерную систему координат, откладывая по горизонтальной оси

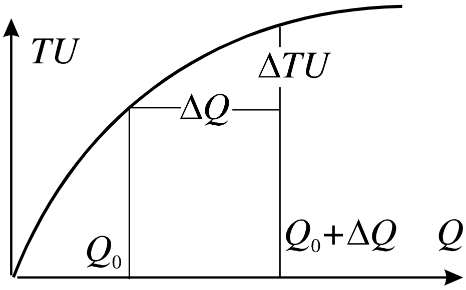


Рис. 7

количество потребляемого товара Q, а по вертикальной оси – общую полезность TU, как это сделано на рисунке 7. В этой системе координат проведем график функции $TU = TU(Q)$. Точка Q_0 на горизонтальной оси означает количество приобретенного товара, величина ΔQ –добавочный приобретенный товар. Разность $\Delta TU = TU(Q_0 + \Delta Q) – TU(Q_0)$ - добавочная полезность, полученная от покупки “довеска” ΔQ. Тогда добавочная полезность от последней приобретенной порции (или единицы количества) товара вычисляется по формуле $\Delta TU / \Delta Q$ (Курс экономической теории. Под общей редакцией проф. Чепурина М.Н. 1995, стр. 122). Эта дробь, как можно видеть, зависит от величины ΔQ. Если здесь перейти к пределу при $\Delta Q \to 0$, то получится формула для определения предельной полезности MU:

$$MU=\frac{dTU}{dQ}.$$

Это означает, что **предельная полезность равна производной функции полезности** $TU(Q)$. **Закон убывающей предельной полезности** сводится к уменьшению этой производной с ростом величины Q. Отсюда следует выпуклость графика функции $TU(Q)$. Понятие функции полезности и представление предельной полезности в виде производной этой функции широко используется в математической экономике.

Занятия 26-28. Неопределенный интеграл.

Функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, если для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, для функции x^2 первообразной будет функция $x^3/3$.

Если для $F(x)$ установлено равенство $dF(x) = f(x)dx$, то $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, так как $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x)$.

Рассмотрим две теоремы, которые называются теоремами об общем виде всех первообразных данной функции.

Теорема 1. **Если** $F(x)$ – **первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$, **то** $F(x) + C$, **где** C – **число**, **тоже первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$.

Доказательство.

$$(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$$

По определению $F + C$ — первообразная для f.

Прежде чем рассмотреть теорему 2, докажем две вспомогательные теоремы.

Если функция $g(x)$ **постоянна на** $(a;b)$, **то** $g'(x) = 0$.

Доказательство.

Так как $g(x) = C$, справедливы равенства: $g'(x) = C' = 0$ (здесь, как и ниже, через C обозначено произвольно выбранное число).

Если $g'(x) = 0$ **при всех** $x \in (a;b)$, **то** $g(x) = C$ **на** $(a;b)$.

Доказательство.

Пусть $g'(x) = 0$ во всех точках $(a;b)$. Зафиксируем точку $x_1 \in (a;b)$. Тогда для любой точки $x \in (a;b)$ по формуле Лагранжа имеем

$$g(x) - g(x_1) = g'(\xi)(x - x_1)$$

Так как $\xi \in (x;\, x_1)$, а точки x и x_1 принадлежат промежутку $(a;b)$, то $g'(\xi) = 0$, откуда следует, что $g(x) - g(x_1) = 0$, то есть $g(x) = g(x_1) = const$.

Теорема 2. **Если** $F(x)$ **есть первообразная для** $f(x)$ **на промежутке** $(a;b)$, **а** $G(x)$ – **другая первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$, **то** $G = F + C$, **где** C – **число**.

Доказательство.

Возьмем производную от разности $G - F$: $(G - F)' = G' - F' =$

$= f - f = 0$. Отсюда следует: $G - F = C$, где C — число, то есть $G = F + C$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольное число.

Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется **интегрированием**.

Из определения неопределенного интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления $F'(x) = f(x)$ соответствует формула $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ интегрального исчисления. Отсюда получается **таблица неопределенных интегралов**:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha\neq 1)$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int a^x dx = a^x \log_a e + C$ $(\alpha\neq 1)$;

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$;

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{x^2+1} = \mathrm{arctg} x + C =$
$= -\mathrm{arcctg} x + C$;

11) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C =$
$= -\arccos x + C$;

12) $\int \dfrac{dx}{x(a-x)} = \dfrac{1}{a}\ln\left|\dfrac{x}{a-x}\right| + C$.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $(\int f(x)\,dx)' = f(x)$;

2) $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$;

3) $d\int f(x)\,dx = f(x)dx$;

4) $\int d\,f(x) = f(x) + C$;

5) $\int kf(x)dx = k\int f(x)\,dx$;

6) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

7) Если $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\,dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b) + C$ $(a\neq 0)$.

Все эти свойства непосредственно следуют из определения.

Замена переменной в неопределенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, то имеет место формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int f(x)\,dx, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Можно привести примеры вычисления интеграла с помощью перехода от левой части к правой в этой формуле, а можно привести примеры обратного перехода.

Примеры. 1. $I = \int \cos(t^3)\, t^2\, dt$. Пусть $t^3 = x$, тогда $dx = 3t^2dt$ или $t^2dt = dx/3$.

$$I = \int \cos x \frac{dx}{3} = \frac{1}{3}\int \cos x dx = \frac{1}{3}\sin x + C = \frac{1}{3}\sin t^3 + C.$$

2. $I = \int \frac{\ln^2 t + \sqrt{\ln t}}{t}\,dt$. Пусть $\ln t = x$, тогда $dx = dt/t$.

$$I = \int \left(x^2 + \sqrt{x}\right)dx = \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3} + C =$$

$$= \frac{\ln^3 t}{3} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln t}\right)^3 + C.$$

3. $I = \int \mathrm{tg} t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t}dt$. Пусть $x = \cos t$, тогда $dx = -\sin t\, dt$, и

$$I = \int \frac{-dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C = -\ln|\cos t| + C.$$

4. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Пусть $x = \sin t$, тогда $dx = \cos dt$, и

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \int dt = t + C = \arcsin x + C.$$

Занятия 29-30. Формула интегрирования по частям

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на некотором промежутке функции. Тогда

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Отсюда следует

$$\int (uv)'dx = \int (u'v + v'u)dx = \int u'v\,dx + \int v'u\,dx$$

или

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx\,.$$

Отсюда следует формула, которая называется формулой интегрирования по частям:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)du(x)$$

Приведем примеры применения формулы интегрирования по частям.

Примеры. 1. $I = \int x\cos x\,dx$. Пусть $u = x$; $dv = \cos x\,dx$, тогда $du = dx$; $v = \sin x$. Отсюда по формуле интегрирования по частям получается:

$$I = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

2. $I = \int (x^2 - 3x + 2)\,e^{5x}dx.$ Пусть $x^2 - 3x + 2 = u$; $e^{5x}dx = dv$. Тогда $du = (2x - 3)\,dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$.

$$I = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 5x + 2\right) - \frac{1}{5}\int (2x-3)e^{5x}dx.$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям, полагая $2x - 3 = u$; $e^{5x}dx = dv$. Отсюда следует: $du = 2dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$, и окончательно получаем:

$$I = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 3x + 2\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}(2x-3) - \frac{1}{5}\int e^{5x}\,2dx\right) =$$

$$= \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 3x + 2\right) - \frac{1}{25}e^{5x}(2x-3) - \frac{2}{25}e^{5x} + C.$$

3. $I = \int\left(x^5 + \sqrt{x}\right)\ln x\,dx$;

$$\ln x = u; \left(x^5 + \sqrt{x}\right)dx = dv;\ \frac{dx}{x} = du; \frac{x^6}{6} + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = v;$$

$$I=\ln x\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-\int\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-\int\frac{x^5}{6}dx-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\ln x-\frac{x^6}{36}-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

В заключение покажем метод вычисления неопределенного интеграла, стоящего в приведенной выше таблице под номером 12:

$$I=\int\frac{dx}{x(a-x)}.$$

Представим дробь $\dfrac{1}{x(a-x)}$ в виде суммы двух дробей: $\dfrac{A}{x}$ и $\dfrac{B}{a-x}$, и попытаемся найти неизвестные величины параметров *A* и *B*. Из равенства $\dfrac{1}{x(a-x)}=\dfrac{(B-A)x+aA}{x(a-x)}$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} B-A=0 \\ aA=1 \end{cases}$$

с решением $A=\dfrac{1}{a};B=\dfrac{1}{a}$. Отсюда следует:

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{a-x}=\frac{1}{a}\left(\ln|x|-\ln|a+x|\right)+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a-x}\right|+C.$$

Полученный интеграл в обиходе обычно называют “высоким логарифмом”. Метод, которым он был найден, называется методом “неопределенных коэффициентов”. Этот метод применяется при вычислении интегралов от дробей с числителем и знаменателем в виде многочленов.

Занятие 31. Определенный интеграл

Пусть на промежутке $[a;b]$ задана функция $f(x)$. Будем считать функцию непрерывной, хотя это не обязательно. Выберем на промежутке $[a;b]$ произвольные числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, удовлетворяющие условию: $a< x_1,< x_2<\ldots< x_{n-1},<b$. Эти числа разбивают промежуток $[a;b]$ на n более мелких промежутков: $[a;x_1]$, $[x_1;x_2]$, $\ldots$ $[x_{n-1};b]$. На каждом из этих промежутков выберем произвольно по одной точке: $c_1\in[a;x_1]$, $c_2\in[x_1;x_2]$, $\ldots$ $c_n\in[x_{n-1};b]$.

Введем обозначения: $\Delta x_1 = x_1 - a$; $\Delta x_2 = x_2 - x_1$; $\ldots$ $\Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i \,.$$

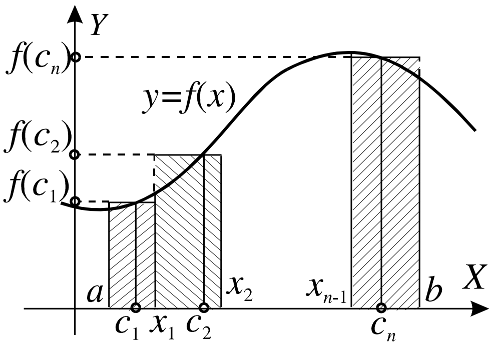


Рис. 1

Она называется **интегральной** суммой функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит от способа разбиения промежутка и от выбора точек c_i.

Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника, покрытого штриховкой на рисунке 1.

Введем обозначение: $\lambda = \max(\Delta x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$ n.. Величину λ иногда называют **параметром разбиения**.

Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю. **Определенным интегралом**

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при этом процессе, если предел существует:

$$I = \lim_{n\to\infty;\lambda\to 0} \sigma .$$

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения промежутка $[a;b]$ и выбора точек c_i.

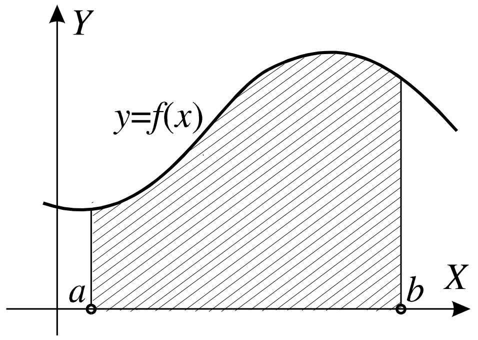


Рис. 2

Число a называется **нижним пределом интегрирования**, а число b — **верхним пределом интегрирования**.

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной, неотрицательной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси X, и прямыми $x = a$; $x = b$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией. На рисунке 2 криволинейная трапеция выделена штриховкой. Площадь S этой трапеции определяется формулой

$$S = I = \int_a^b f(x)dx.$$

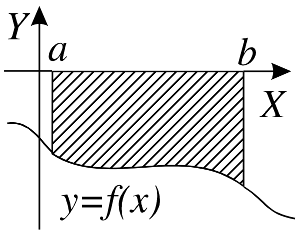


Рис. 3

Если $f(x) < 0$ во всех точках промежутка $[a;b]$ и непрерывна на этом промежутке (например, как изображено на рисунке 3), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a;b]$ горизонтальной оси координат, прямыми $x = a$; $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, определяется формулой

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

Перечислим свойства определенного интеграла:

1) $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (здесь k - произвольное число);

2) $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;

3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;

4) Если $c \in [a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Из этих свойств следует, например, что $\int_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$.

Все приведенные выше свойства непосредственно следуют из определения определенного интеграла.

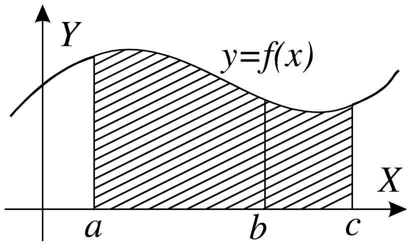


Рис. 4

Оказывается, что формула из пункта 4 справедлива и тогда, когда $c \notin [a;b]$. Пусть, например, $c>b$, как изображено на рисунке 4. В этом случае верны равенства

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^c - \int\limits_b^c = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b .$$

Определенный интеграл как функция верхнего предела

Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, содержащем точку a. Тогда каждому числу x из этого промежутка можно поставить в соответствие число

$$I(x) = \int\limits_a^x f(t)dt,$$

определив тем самым на промежутке функцию $I(x)$, которая называется определенным интегралом с переменным верхним пределом. Отметим, что в точке $x = a$ эта функция равна нулю. Вычислим производную этой функции в точке x. Для этого сначала рассмотрим приращение функции в точке x при приращении аргумента Δx:

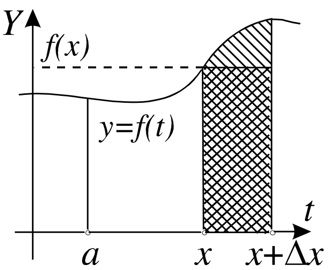


Рис. 1

$$\Delta I(x) = I(x + \Delta x) - I(x) =$$

$$= \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt =$$

$$= \int\limits_a^x f(t)dt + \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Как показано на рисунке 1, величина последнего интеграла в формуле для приращения $\Delta I(x)$ равна площади криволинейной трапеции, отмеченной штриховкой. При малых величинах Δx (здесь, так же как и везде в этом курсе, говоря о малых величинах приращений аргумента или функции, имеем в виду абсолютные величины приращений, так как сами приращения могут быть и положительными и отрицательными) эта площадь оказывается приблизительно равной площади прямоугольника, отмеченного на рисунке двойной штриховкой.

Площадь прямоугольника определяется формулой $f(x)\Delta x$. Отсюда получаем соотношение

$$\Delta I(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \approx f(x)\Delta x.$$

В последнем приближенном равенстве точность приближения тем выше, чем меньше величина Δx.

Из сказанного следует формула для производной функции $I(x)$:

$$I'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta x}{\Delta x}=f(x).$$

Производная определенного интеграла по верхнему пределу в точке x **равна значению подынтегральной функции в точке** x. Отсюда следует, что функция $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для функции $f(x)$, причем такой первообразной, которая принимает в точке $x = a$ значение, равное нулю. Этот факт дает возможность представить определенный интеграл в виде

$$\int_a^x f(t)dt = I(x) - I(a). \qquad (1)$$

Пусть $F(x)$ тоже является первообразной для функции $f(x)$, тогда по теореме об общем виде всех первообразных функции $I(x) = F(x) + C$, где C — некоторое число. При этом правая часть формулы (1) принимает вид

$$I(x) - I(a) = F(x) + C - (F(a) + C) = F(x) - F(a). \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) после замены x на b следует формула для вычисления определенного интеграла от функции $f(t)$ по промежутку $[a;b]$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

которая называется формулой **Ньютона-Лейбница**. Здесь $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и подсчитать разность значений первообразной в точках b и a. Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$.

Приведем примеры вычисления определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Примеры. 1. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$

2. $I=\int\limits_0^1 xe^x dx.$

Сначала вычислим неопределенный интеграл от функции $f(x) = xe^x$. Используя метод интегрирования по частям, получаем: $\int xe^x dx=e^x(x-1)+C$. В качестве первообразной функции $f(x)$ выберем функцию $e^x(x-1)$ и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$I = e^x(x-1)\Big|_0^1 = 1.$$

При вычислении определенных интегралов можно применять **формулу замены переменной в определенном интеграле**:

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_\alpha^\beta f(\quad(t))\quad'(t)dt.$$

Здесь α и β определяются, соответственно, из уравнений $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, а функции f, φ, φ' должны быть непрерывны на соответствующих промежутках.

Пример: $I=\int\limits_1^e\frac{\ln x dx}{x}$.

Сделаем замену: $\ln x = t$ или $x = e^t$, тогда если $x = 1$, то $t = 0$, а если $x = e$, то $t = 1$. В результате получим:

$$I=\int\limits_0^1\frac{\ln e^t e^t dt}{e^t}=\int\limits_0^1 t dt=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}.$$

При замене переменной в определенном интеграле не нужно возвращаться к исходной переменной интегрирования.

Занятия 32-33. Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Если положить промежуток интегрирования бесконечным, то приведенное выше определение определенного интеграла теряет смысл, например, потому что невозможно осуществить условия $n\to\infty$; $\lambda\to 0$ для бесконечного промежутка. Для такого интеграла требуется специальное определение.

Пусть функция $\boldsymbol{y=f(x)}$ определена и непрерывна на полубесконечном промежутке $[a;\infty)$, тогда **несобственным интегралом с бесконечным пределом** $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ называется $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, если предел существует. Если этот предел не существует, то не существует и несобственный интеграл. В этом случае принято говорить, что несобственный интеграл **расходится**. При существовании предела говорят, что несобственный интеграл **сходится.**

Аналогично

$$\int\limits_{-\infty}^{b} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \text{ и } \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\lim_{a\to-\infty}\left(\lim_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx\right).$$

Примеры: 1. $I=\int\limits_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$. Очевидно: $\int\limits_1^b\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_1^b=1-\frac{1}{b}$, откуда следует

$$I=\lim_{b\to\infty}\left(1-\frac{1}{b}\right)=1.$$

2. $I=\int\limits_4^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_4^b\frac{dx}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{b\to\infty}2\sqrt{x}\Big|_4^b=\lim\limits_{b\to\infty}2\left(\sqrt{b}-2\right)$; этот предел не существует, следовательно, не существует или расходится интеграл I.

3. $I=\int\limits_e^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{b\to\infty}(\ln b-1)$; здесь предел также не существует, и интеграл расходится.

Упражнения

1. Найти производные от следующих функций:

1)	$y=x^6-3x^5+2x^2+1$;	2)	$y=\mathrm{arctg}x+\mathrm{arcctg}x$;
3)	$y=5x^{\frac{2}{3}}-3x^{\frac{5}{2}}+2x^{-3}$;	3)	$y=\left(x^2-2x+2\right)2^x$;
5)	$y=5\mathrm{tg}x-3\mathrm{ctg}x$;	6)	$y=x\arcsin x$;

7) $y = 2t\sin t - \left(t^2 - 2\right)\cos t$;

8) $y = \log_7 x \cdot \operatorname{arcctg} x$;

9) $y = \dfrac{x^3 + 1}{x^2 - x - 5}$;

10) $y = \dfrac{x^5}{6^x}$;

11) $y = \left(1 + x^3\right)\left(5 + \dfrac{1}{x^2}\right)$ где $x = 1$;

12) $y = \dfrac{\arccos x}{x^9}$;

13) $y = \dfrac{\cos t}{1 - \sin t}$ где $t = \pi / 6$;

14) $y = \dfrac{1}{x} + 2\ln x - \dfrac{\ln x}{x}$

15) $y = \dfrac{e^x + \sin x}{x e^x}$;

16) $y = 7^x \arccos x$.