Занятия 1-3. Роль и место знаний по дисциплине в процессе освоения основной профессиональной образовательной программы по специальности. Функция. Свойства функций

План

1. *Определение функции*
2. *Монотонность функции*
3. *Экстремумы функции*

Пусть D **— некоторое множество чисел. Если задан закон, по которому каждому числу** x **из множества** D **ставится в соответствие единственное определенное число** y**, то будем говорить, что на множестве** D **задана функция, которую назовём** f**. Число** y **— это значение функции** f **в точке** x**, что обозначается формулой** $y = f(x)$**.**

Число x называется аргументом функции, множество D — областью определения функции, а все значения y образуют множество E, которое называется множеством значений или областью изменения функции.

Функция f **называется возрастающей (убывающей) на множестве** G, **если для любых чисел** x_1 **и** x_2 **из множества** G, **таких что** $x_1 < x_2$, **выполняется условие** $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Так как между множеством действительных чисел и множеством точек числовой оси можно установить взаимно-однозначное соответствие, в дальнейшем изложении понятиям “число x” и “точка x числовой оси” в некоторых случаях будет придаваться один и тот же смысл. Например, вместо “значение функции при значении аргумента, равном x_1” будет говориться “значение функции в точке x_1”. В нижеследующем определении можно везде заменить выражение “точка x” на выражение “число x”.

Пусть ε — некоторое положительное число. **ε-окрестностью** точки x_0 называется множество всех точек x, принадлежащих промежутку $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, кроме самой точки x_0. Принадлежность точки x ε-окрестности точки x_0 можно выразить с помощью двойного неравенства

$$0 < |x - x_0| < \varepsilon.$$

Число ε называется **радиусом окрестности**.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 4. Предел функции. свойства предела

План

1. *Определение предела функции*
2. *Свойства пределов*
3. *Непрерывность функции*

Рассмотрим функцию $y = x^2$ в точке $x_0 = 2$. Значение функции в этой точке равно 4.

Отметим одну особенность поведения функции в этой точке. Можно

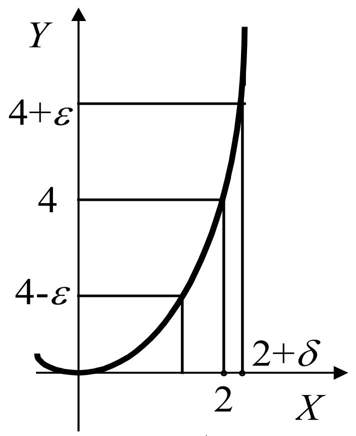


Рис. 1

выбрать какое-либо положительное число ε и построить ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Очевидно, что найдется такая окрестность точки $x_0 = 2$ (на рисунке 1 эта окрестность имеет радиус δ) , что если x будет лежать в этой окрестности, то соответствующее значение y, равное x^2, попадет в ε-окрестность точки $y_0 = 4$. Это заключение справедливо для любого, сколь угодно малого числа ε. Здесь точка $x_0 = 2$ выбрана произвольно. Можно было бы для данной функции выбрать любую другую точку и сделать подобное заключение.

Рассмотрим функцию $y = \dfrac{2x^2 - 5x\text{-}2}{x-2}$. Эта функция не определена в точке $x_0 = 2$. При $x_0 \neq 2$ её можно преобразовать:

$$y = \frac{2(x-2)(x-0{,}5)}{x-2} = 2x - 1.$$

График функции представлен на рисунке 2. Хотя исходная функция не определена в точке $x_0 = 2$ и естественно не равна 3 в этой точке, точка $y_0 = 3$ имеет характерную особенность. Выбрав положительное число ε, можно утверждать, что если рассматривать значения x, расположенные достаточно близко к точке $x_0 = 2$ (или лежащие в некоторой окрестности точки $x_0 = 2$, причем радиус этой окрестности зависит от ε), то соответствующие значения y попадут в ε-окрестность точки $y_0 = 3$. Всё сказанное остаётся справедливым независимо от того, насколько малым выбрано положительное число ε.

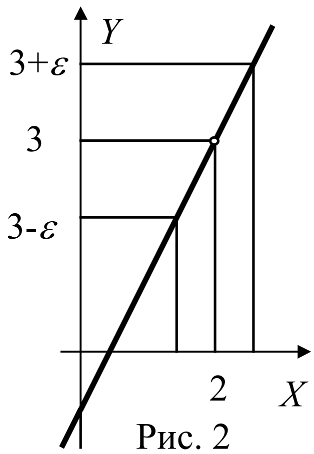


Рис. 2

Введем понятие предела функции. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0 (иногда говорят, при x, стремящемся к x_0), если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x из δ-окрестности точки x_0 соответствующие значения y попадают в ε-окрестность точки $y = A$.

Можно сформулировать определение предела функции по-другому. Число A называется **пределом функции** $y = f(x)$ в точке x_0, если для любого положительного числа ε можно найти такое положительное число δ, что для всех x, удовлетворяющих условию

$$0 < |x - x_0| < \delta,$$

выполняется условие

$$|y - A| < \varepsilon.$$

Тот факт, что A есть предел функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$, записывается формулой

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

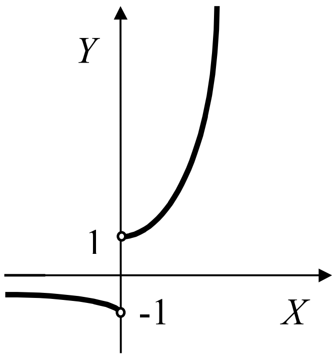


Рис. 3

Как видно из второго из рассмотренных выше примеров, для того, чтобы функция имела предел в точке $x = x_0$, не требуется, чтобы она была определена в этой точке.

Рассмотрим функцию $y = \frac{|x|}{x} 2^x$. Очевидно, что если $x > 0$, то $y = 2^x$; если $x < 0$, то $y = -2^x$; при $x = 0$ функция не определена.

График функции изображен на рисунке 3. Легко убедиться в том, что, согласно приведенному выше определению предела, эта функция в точке $x = 0$ предела не имеет.

Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = x_0$, если она определена в этой точке и ее значение $f(x_0)$ равно пределу функции в этой точке: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$, как и во всех точках числовой оси. Функция $y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{x - 2}$ не является непрерывной в точке $x = 2$. Функция $y = \frac{|x|}{x} 2^x$ не является непрерывной в точке $x = 0$.

Функция, непрерывная в каждой точке открытого промежутка, называется **непрерывной на этом промежутке**.

Приведем свойства предела функции.

1. Функция не может иметь в одной точке два разных предела.

2. $\lim_{x \to x_0} C = C$, если C — постоянная функция.

3. Если существует $\lim_{x \to x_0} f(x)$ и C — постоянная функция, то

$$\lim_{x \to x_0} (Cf(x)) = C \lim_{x \to x_0} f(x).$$

4. Если существуют $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)+\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$, а также существует $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Если при этом $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)\neq 0$, то существует $\lim\limits_{x\to x_0} (f(x)/g(x))$, равный $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)/\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятия 5-6. Односторонние пределы. Непрерывные функции. Точки разрыва функции, их классификация

План

1. *Определения односторонних пределов функции*
2. *Исследование функции на непрерывность*
3. *Точки разрыва функции*
4. *«Замечательные пределы»*

Введем определения так называемых "односторонних пределов".

Число B называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** a **справа** (это записывается в виде формулы $B=\lim\limits_{x\to a+} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ, такое что из из условия $0 < x - a < \delta$ будет следовать $|B - f(x)| < \varepsilon$.

Согласно приведенному определению $\lim\limits_{x\to 0+}\sqrt{x}=0$. Отметим, что обыкновенного предела функция $y=\sqrt{x}$ в точке $x = 0$ не имеет.

Число C называется **пределом функции** $f(x)$ **в точке** b **слева** (это записывается в виде формулы $C=\lim\limits_{x\to b-} f(x)$), если для любого положительного числа ε найдется положительное число δ такое, что из условия $0 < b - x < \delta$ будет следовать $|C - f(x)| < \varepsilon$.

Очевидно, что функция $y(x) = \frac{|x|}{x} 2^x$ (её график, изображен на рисунке 3) имеет два односторонних предела в точке $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0+} y(x) = 1; \quad \lim_{x \to 0-} y(x) = -1.$$

Функция $f(x)$ называется **непрерывной в точке *a* справа** (непрерывной в точке b слева), если

$$\lim_{x \to a+} f(x) = f(a) \quad \left(\lim_{x \to b-} f(x) = f(b) \right).$$

Функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна справа в точке x=0.

Функция называется **непрерывной на замкнутом промежутке** $[a, b]$, если она непрерывна на открытом промежутке (a, b), непрерывна справа в точке a и непрерывна слева в точке b.

Достаточно просто можно доказать теорему, связывающую понятия предела функции в точке и односторонних пределов. Мы ограничимся только формулировкой теоремы.

Для того, чтобы выполнялось равенство $\lim_{x \to x_0} f(x) = A$, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись два равенства:

$$\lim_{x \to x_0 +} f(x) = A; \quad \lim_{x \to x_0 -} f(x) = A$$

В дальнейшем нам понадобятся понятия предела функции в бесконечно удалённых точках. Рассмотрим сначала функцию $f(x)$, определенную на полубесконечном промежутке $(x_0; \infty)$. **Число *A* называется пределом функции $f(x)$ при *x*, стремящемся к бесконечности**:

$$A = \lim_{x \to \infty} f(x),$$

если для любого положительного числа ε **можно найти такое положительное число *M*** (**зависящее от** ε), **что для всех чисел *x*, превосходящих *M*, выполняется условие**:

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

Пусть теперь функция $f(x)$ определена на полубесконечном промежутке $(-\infty; x_0)$. **Число** A **называется пределом функции** $f(x)$ **при** x, **стремящемся к минус бесконечности**:

$$A = \lim_{x \to -\infty} f(x),$$

если для любого положительного числа ε **можно найти такое положительное число** M **(зависящее от** ε), что **для всех чисел** x, **меньших, чем** $-M$, **выполняется условие**:

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon.$$

Отметим два, так называемых, "замечательных предела".

1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Геометрический смысл этой формулы заключается в том, что прямая $y = x$ является касательной к графику функции $y = \sin x$ в точке $x = 0$.

2. $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$. Здесь e — иррациональное число, приблизительно равное 2,72.

Приведем пример применения понятия предела функции в экономических расчетах. Рассмотрим обыкновенную финансовую сделку: предоставление в долг суммы S_0 с условием, что через период времени T будет возвращена сумма S_T. Определим величину r **относительного роста** формулой

$$r = \frac{S_T - S_0}{S_0}. \tag{1}$$

Относительный рост можно выразить в процентах, умножив полученное значение r на 100.

Из формулы (1) легко определить величину S_T:

$S_T = S_0(1 + r)$

При расчете по долгосрочным кредитам, охватывающим несколько полных лет, используют схему сложных процентов. Она состоит в том, что если за 1-

й год сумма S_0 возрастает в $(1+r)$ раз, то за второй год в $(1+r)$ раз возрастает сумма $S_1 = S_0(1 + r)$, то есть $S_2 = S_0(1 + r)^2$. Аналогично получается $S_3 = S_0(1 + r)^3$. Из приведенных примеров можно вывести общую формулу для вычисления роста суммы за n лет при расчете по схеме сложных процентов:

$S_n = S_0(1 + r)^n$.

В финансовых расчетах применяются схемы, где начисление сложных процентов производится несколько раз в году. При этом оговариваются **годовая ставка** r и **количество начислений за год** k. Как правило, начисления производятся через равные промежутки времени, то есть длина каждого промежутка T_k составляет $\frac{1}{k}$ часть года. Тогда для срока в T лет (здесь T не обязательно является целым числом) сумма S_T рассчитывается по формуле

$$S_T = S_0\left(1+\frac{r}{k}\right)^m \qquad (2)$$

Здесь $m = \left[\frac{T}{T_k}\right]$ — целая часть числа $\frac{T}{T_k}$, которая совпадает с самим числом, если, например, T - целое число.

Пусть годовая ставка равна r и производится n начислений в год через равные промежутки времени. Тогда за год сумма S_0 наращивается до величины, определяемой формулой

$$S_1 = S_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^n \qquad (3)$$

В теоретическом анализе и в практике финансовой деятельности часто встречается понятие “непрерывно начисляемый процент”. Чтобы перейти к непрерывно начисляемому проценту, нужно в формулах (2) и (3) неограниченно увеличивать соответственно, числа k и n (то есть устремить k и n к бесконечности) и вычислить, к какому пределу будут стремиться функции S_T и S_1. Применим эту процедуру к формуле (3):

$$S_1^{\;*}=\lim_{n\to\infty}S_1=S_0\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^n=S_0\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right)^r=S_0\left\{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{r}{n}\right)^{\frac{n}{r}}\right\}^r.$$

Заметим, что предел в фигурных скобках совпадает со вторым замечательным пределом. Отсюда следует, что при годовой ставке r при непрерывно начисляемом проценте сумма S_0 за 1 год наращивается до величины $S_1^{\;*}$, которая определяется из формулы

$$S_1^{\;*}=S_0e^r. \tag{4}$$

Пусть теперь сумма S_0 предоставляется в долг с начислением процента n раз в год через равные промежутки времени. Обозначим r_e годовую ставку, при которой в конце года сумма S_0 наращивается до величины $S_1^{\;*}$ из формулы (4). В этом случае будем говорить, что r_e — это **годовая ставка при начислении процента *n* раз в год, эквивалентная годовому проценту *r* при непрерывном начислении.** Из формулы (3) получаем

$$S_1^{\;*}=S_0\left(1+\frac{r_e}{n}\right)^n.$$

Приравнивая правые части последней формулы и формулы (4), полагая в последней $T=1$, можно вывести соотношения между величинами r и r_e:

$$r=n\ln\left(1+\frac{r_e}{n}\right),\quad r_e=n\left(e^{\frac{r}{n}}-1\right).$$

Эти формулы широко используются в финансовых расчётах.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 7. Производная функции. Формулы дифференцирования

План

1. *Определение производной функции*
2. *Дифференцирование функции*
3. *Физический и геометрический смыслы производной функции.*

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, непрерывную в некоторой окрестности точки x. Пусть Δx □ приращение аргумента в точке x. Обозначим через Δy или Δf приращение функции, равное $f(x+\Delta x) - f(x)$. Отметим здесь, что функция непрерывна в точке x, если в этой точке бесконечно малому приращению аргумента Δx соответствует бесконечно малое приращение функции Δf.

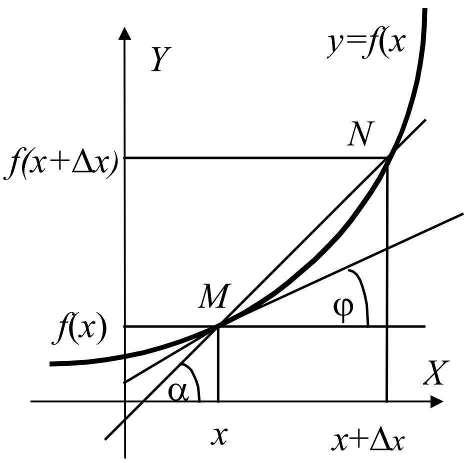


Рис. 1

Отношение $\Delta f / \Delta x$, как видно из рисунка 1, равно тангенсу угла α, который составляет секущая MN кривой $y = f(x)$ с положительным направлением горизонтальной оси координат.

Представим себе процесс, в котором величина Δx, неограниченно уменьшаясь, стремится к нулю. При этом точка N будет двигаться вдоль кривой $y = f(x)$, приближаясь к точке M, а секущая MN будет вращаться около точки M так, что при очень малых величинах Δx её угол наклона α будет сколь угодно близок к углу φ наклона касательной к кривой в точке x. Следует отметить, что все сказанное относится к случаю, когда график функции $y = f(x)$ не имеет излома или разрыва в точке x, то есть в этой точке можно провести касательную к графику функции.

Отношение $\Delta y / \Delta x$ или, что то же самое $(f(x + \Delta x)$ □ $f(x)) / \Delta x$, можно рассматривать при заданном x как функцию аргумента Δx. Эта функция не определена в точке $\Delta x = 0$. Однако её предел в этой точке может существовать.

Если существует предел отношения $(f(x + \Delta x) - f(x)) / \Delta x$ в точке $\Delta x = 0$, то он называется **производной** функции $y = f(x)$ в точке x и обозначается y' или $f'(x)$:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Нахождение производной функции $y = f(x)$ называется **дифференцированием**.

Если для любого числа x из открытого промежутка (a, b) можно вычислить $f'(x)$, то функция $f(x)$ называется **дифференцируемой на промежутке (*a*, *b*)**.

Геометрический смысл производной заключается в том, что производная функции $f(x)$ в точке x равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Производная □ это скорость изменения функции в точке x. Из определения производной следует, что $f'(x) \approx \Delta f / \Delta x$, причем точность этого приближенного равенства тем выше, чем меньше Δx. Производная $f'(x)$ является приближенным коэффициентом пропорциональности между Δf и Δx.

Производная функции $f(x)$ не существует в тех точках, в которых функция не является непрерывной. В то же время функция может быть непрерывной в точке x_0, но не иметь в этой точке производной. Такую точку назовём угловой точкой графика функции или точкой излома. Графические примеры приведены на рисунке 2.

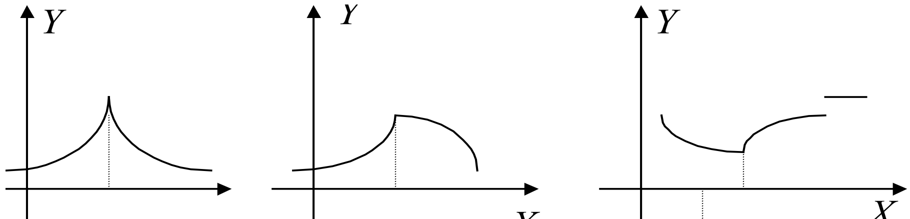


Рис. 2

Так функция $y = |x|$ не имеет производной в точке $x = 0$, хотя является непрерывной в этой точке.

Ниже приводится таблица производных элементарных функций.

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
C	0	e^x	e^x	$\cos x$	$-\sin x$
x	1	$\ln x$	$1/x$	$\mathrm{tg} x$	$1/\cos^2 x$
x^n	nx^{n-1}	a^x	$a^x \ln a$	$\arcsin a$	$1/\sqrt{1-x^2}$
$\sqrt{x}$	$1/(2\sqrt{x})$	$\log_a x$	$1/(x\ln a)$	$\arccos a$	$-1/\sqrt{1-x^2}$
$1/x$	$-1/x^2$	$\sin x$	$\cos x$	$\mathrm{arctg} x$	$1/(1+x^2)$

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 8-9. Теоремы о дифференцировании

План

1. *Теоремы о дифференцировании функции*
2. *Производная сложной функции*
3. *Дифференциал функции*

1. Если функция имеет производную в точке, то она непрерывна в этой точке.

2. Если существует $f'(x)$, и C - произвольное число, то функция $Cf(x)$ имеет производную: $(Cf(x))' = Cf'(x)$.

3. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то функция $S(x) = f(x) + g(x)$ имеет производную: $S'(x) = f'(x) + g'(x)$.

4. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$, то функция $P(x) = f(x)g(x)$ имеет производную: $P'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

5. Если существуют $f'(x)$ и $g'(x)$ и при этом $g(x) \neq 0$, то функция $D(x) = f(x) / g(x)$ имеет производную: $D'(x) = (f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)) / g^2(x)$.

В любом курсе математического анализа доказывается теорема о **производной сложной функции**. Мы ограничимся лишь ее формулировкой.

Пусть функция $g(x)$ имеет производную в точке x, а функция $f(z)$ имеет производную в точке $z = g(x)$. Тогда сложная функция $F(x) = f(\mathrm{g}(x))$ имеет в точке x производную $F'(x) = f'(z)\ \mathrm{g}'(x)$.

Приведем примеры вычисления производной сложной функции.

$$F(x) = \sin^2 x,\ F'(x) = 2\sin x\cos x = \sin 2x;$$
$$F(x) = \sin x^2,\ F'(x) = 2x\cos x^2;$$
$$F(x) = \ln\cos x, F'(x) = \frac{1}{\cos x}(-\sin x) = -\mathrm{tg}x;$$
$$F(x) = \cos\ln x, F'(x) = (-\sin\ln x)\frac{1}{x}.$$

Дифференциал функции

Рассмотрим две функции: $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$, которые имеют производные $f_1'(x)$ и $f_2'(x)$ в каждой точке некоторой области D. Возьмем какую-либо точку x из области D и дадим аргументу приращение Δx. Тогда функции получат соответственно приращения $\Delta y_1 = f_1(x + \Delta x) \square f_1(x)$ и $\Delta y_2 = f_2(x + \Delta x) \square f_2(x)$. Из графиков, изображенных на рисунке 3, видно, что в обоих случаях приращения Δy_1 и Δy_2 можно представить в виде сумм двух слагаемых:

$$\Delta y_1 = (C_1 - A_1) + (B_1 - C_1);\quad \Delta y_2 = (C_2 - A_2) + (B_2 - C_2) \qquad (1)$$

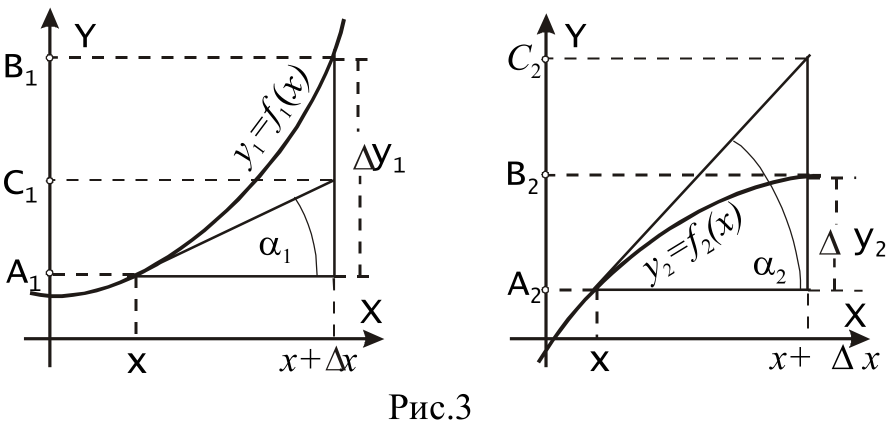


Рис.3

Первые слагаемые в правых частях обоих выражений (1) легко вычисляются из сходных формул: $C_1 - A_1 = \mathrm{tg}\alpha_1\ \Delta x = f_1{}'(x)\Delta x$; $C_2 - A_2 = \mathrm{tg}\alpha_2\ \Delta x = f_2{}'(x)\Delta x$.

Величина $f'(x)\,\Delta x$ называется главной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x. (Здесь мы говорим только о функции, имеющей в точке x производную). Главная часть приращения функции линейна относительно приращения аргумента Δx (можно сказать – пропорциональна приращению Δx). Это означает, что если приращение аргумента Δx уменьшить в k раз, то и главная часть приращения функции уменьшится в k раз.

Формулы (1) можно переписать в виде:

$$\Delta y_1 = f_1{}'\Delta x + r_1;\quad \Delta y_2 = f_2{}'\Delta x + r_2. \tag{2}$$

Здесь $r_1 = B_1 - C_1$; $r_2 = B_2 - C_2$.

Величины r_1 и r_2 в формулах (2) при уменьшении Δx в k раз уменьшаются более чем в k раз, что можно видеть, сравнивая рисунки 3 и 4, и говорят, что r_1 и r_2 стремятся к нулю быстрее, чем Δx .

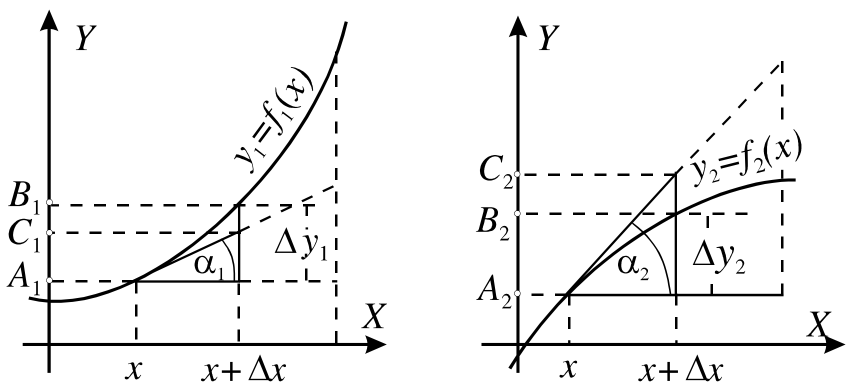


Рис. 4

Назовем функцию $\beta(z)$ **бесконечно малой** в точке $z = z_0$, если $\lim\limits_{z\to z_0} \beta(z) = 0$.

Пусть функции $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ являются бесконечно малыми в точке $z = z_0$.. Функция $\beta(z)$ называется **бесконечно малой более высокого порядка**, чем функция $\gamma(z)$, если $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{\beta(z)}{\gamma(z)} = 0$.

Величины r_1 и r_2 в формулах (2) являются функциями аргумента Δx, бесконечно малыми в точке $\Delta x = 0$. Можно показать, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{r_i(\Delta x)}{\Delta x} = 0; \; i = 1,2$. Это означает, что **функции** $r_1(\Delta x)$ и $r_2(\Delta x)$ **являются бесконечно малыми функциями более высокого порядка, чем** Δx, **в точке** $\Delta x = 0$.

Таким образом приращение функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке, в которой существует её производная, может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x)\,\Delta x + \beta\,(\Delta x),$$

где $\beta\,(\Delta x)$ - бесконечно малая функция более высокого порядка, чем Δx, в точке $\Delta x = \mathbf{0}$.

Главная, линейная относительно Δx, часть приращения функции $y = f(x)$, равная $f'(x)\,\Delta x$, называется **дифференциалом** и обозначается dy:

$$dy = f'(x)\,\Delta x. \tag{3}$$

Если сюда подставить функцию $f(x) = x$, то, так как $x' = 1$, формула (3) примет вид: $dx = \Delta x$. Эта формула легко истолковывается с помощью графика функции $y = x$, из которого видно, что приращение этой функции содержит лишь главную часть. Таким образом, для функции $y = x$ приращение совпадает с дифференциалом. Теперь формулу дифференциала (3) можно переписать так

$$dy = f'(x)\,dx.$$

Отсюда следует, что

$$f'(x) = \frac{dy}{dx},$$

то есть **производная функции** $f(x)$ **равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента** $\boldsymbol{x}$.

Очевидны следующие свойства дифференциала.

1. $dC = 0$ (здесь и в следующей формуле C □ постоянная);

2. $d(Cf(x)) = Cdf(x)$;

3. Если существуют $df(x)$ и $dg(x)$, то $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x)$, $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x)$. Если при этом $g(x) \neq 0$, то

$$d\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}$$

Пусть $y = f(x)$ - функция, имеющая производную в точке x, тогда $dy = df(x) = f'(x)dx$. Если аргумент x является функцией $x(t)$ некоторой независимой переменной t, то $y = F(t) = f(x(t))$ □ сложная функция от t, и её дифференциал вычисляется по формуле $dy = F'(t)dt = f'(x)x'(t)dt$. Однако по определению дифференциала $x'(t)dt = dx$ и последняя формула преобразуется к виду: $dy = f'(x)dx$.

Таким образом если аргумент функции $y=f(x)$ рассматривать как функцию другого аргумента так, что равенство $\Delta x = dx$ не выполняется, формула дифференциала функции $f(x)$ остается неизменной. Это свойство принято называть свойством **инвариантности дифференциала**.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 10-11. Вычисление производных высших порядков.

План

1. *Вторая производная функции*
2. *Формула Лагранжа*

Может оказаться что функция $f'(x)$, называемая первой производной, тоже имеет производную $(f'(x))'$. Эта производная называется **второй производной** функции $f(x)$ и обозначается $f''(x)$. Если f есть координата движущейся точки и является функцией времени, то мгновенная скорость точки в момент времени t равна $f'(t)$, а ускорение равно $f''(t)$.

Вторая производная также может быть функцией, определенной на некотором множестве. Если эта функция имеет производную, то эта производная называется **третьей производной** функции $f(x)$ и обозначается $f'''(x)$.

Если определена n-я производная $f^{(n)}(x)$ и существует её производная, то она называется $(n+1)$-й производной функции $f(x)$: $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)}(x))'$.

Все производные, начиная со второй, называются **производными высших порядков.**

Формула Лагранжа

Если функция непрерывна на замкнутом промежутке $[a, b]$ и дифференцируема на открытом промежутке (a, b), то можно найти такую точку c, принадлежащую промежутку (a, b), для которой справедливо равенство:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{1}$$

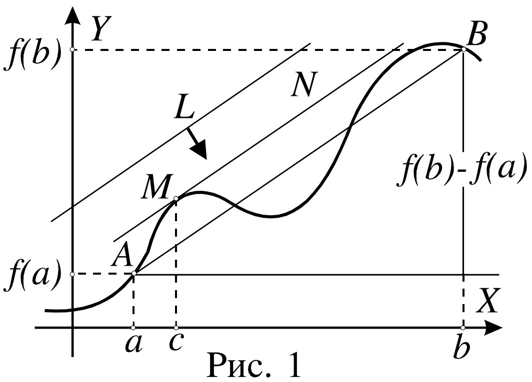


Рис. 1

Эта формула называется формулой конечных приращений Лагранжа. Проведем наглядное обоснование этой формулы. Возьмем на графике функции $f(x)$ точки $A(a;f(a))$ и $B(b;f(b))$. Проведем через эти точки прямую AB. Проведем также прямую L, параллельную прямой AB, так, чтобы она не пересекала график функции $f(x)$ на промежутке (a, b). Сохраняя параллельность L и AB, будем "надвигать" прямую L на график $f(x)$ до тех пор, пока прямая L не коснется графика $f(x)$ в некоторой точке c промежутка (a, b). Геометрическую точку касания обозначим буквой M, а через MN обозначим касательную к графику $f(x)$, параллельную прямой AB. Очевидно, угловые коэффициенты прямых MN и AB (то есть тангенсы углов наклона прямых к оси абсцисс) равны. Угловой коэффициент прямой MN равен $f'(c)$, а угловой коэффициент прямой AB равен $(f(b)$ □□$f(b))/(b-a)$, и справедлива формула:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отсюда сразу получается формула (1). На приведенном рисунке видно, что могут существовать другие точки, принадлежащие промежутку (a, b), в которых касательные к графику функции $f(x)$ параллельны прямой MN. Производную функции $f(x)$, вычисленную в любой из этих точек, можно подставить в правую часть формулы (1) вместо множителя $f'(c)$.

Сформулируем теорему о монотонности функции. **Если $f'(x) > 0$ на промежутке $(a;b)$, то на $(a;b)$ функция $f(x)$ возрастает. Если $f'(x) < 0$ на промежутке $(a;b)$, то на $(a;b)$ функция $f(x)$ убывает.**

Докажем эту теорему. Пусть t_1 и t_2 — любые числа из промежутка $(a;b)$, причем $t_2>t_1$. Тогда по теореме Лагранжа можно указать такое число c из промежутка $(t_1;t_2)$, для которого справедливо равенство $f(t_2) - f(t_1) = f'(c)(t_2 - t_1)$. Если $f'(x) > 0$ для всех x из промежутка $(a;b)$, то $f'(c) > 0$, и из условия $t_2 > t_1$ следует, что $f(t_2) - f(t_1) > 0$. Таким образом, возрастание функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ доказано. Аналогично доказывается вторая часть теоремы.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 12. Исследование функции на экстремум. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции

План

1. *Необходимые и достаточные условия экстремума функции*
2. *Критические точки функции*
3. *Наибольшее и наименьшее значения функции*

Необходимые и достаточные условия экстремума функции

Точка x_0 называется **точкой минимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) > f(x_0).$$

Точка x_0 называется **точкой максимума** функции $f(x)$, если можно найти такую окрестность этой точки, что для любой точки x из этой окрестности выполняется условие:

$$f(x) < f(x_0).$$

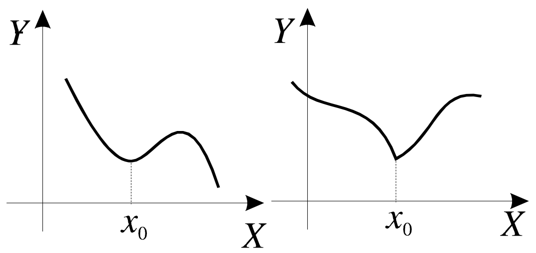


Рис.1

Примеры точек минимума.

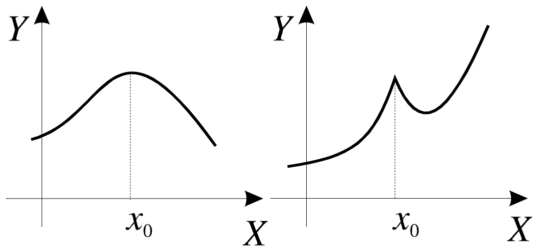


Рис. 2

Примеры точек максимума.

Точки максимума и минимума функции называются **точками экстремума**.

Сформулируем теорему о необходимом условии экстремума функции: **если в точке экстремума функция** $f(x)$ **имеет производную**, **то производная равна нулю**.

Отсюда следует, что точки экстремума функции следует искать среди тех точек её области определения, где производная функции равна нулю или не существует.

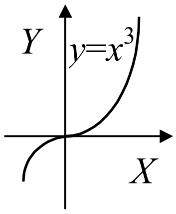


Рис. 3

Если $f'(x_0) = 0$, это еще не значит, что в точке x_0 есть экстремум. Примером может служить функция $y=x^3$. В точке $x=0$ её производная равна нулю, но экстремума функция не имеет. График функции изображен на рисунке 3.

Точка, в которой производная равна нулю, называется **стационарной**.

Точки области определения функции, в которых производная либо равна нулю, либо не существует, называются **критическими**.

Как было показано выше, с помощью необходимого условия нельзя определить, является ли данная точка точкой экстремума, тем более указать, какой экстремум реализуется – максимум или минимум. Для того, чтобы ответить на эти вопросы, сформулируем и докажем теорему, которая называется **достаточным условием экстремума**.

Пусть функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0. Тогда:

1) **если $f'(x) < 0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_0;b)$, то точка x_0 – точка минимума функции $f(x)$**;

2) **если $f'(x) > 0$ на $(a;x_0)$ и $f'(x) < 0$** на **$(x_0;b)$, то точка x_0 – точка максимума функции $f(x)$**;

Докажем первое утверждение теоремы.

Так как $f'(x) < 0$ на $(a;x_0)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x)$ убывает на $(a;x_0]$, и для любого $x \in (a;x_0)$ выполняется условие $f(x)>f(x_0)$.

Так как $f'(x) > 0$ на $(x_0;b)$ и $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то $f(x)$ возрастает на $(x_0;b]$, и для любого $x \in (x_0;b)$ выполняется условие $f(x)>f(x_0)$.

В результате получается, что при любом $x \neq x_0$ из $(a;b)$ выполняется неравенство $f(x)>f(x_0)$, то есть точка x_0 – точка минимума $f(x)$.

Второе утверждение теоремы доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятия 13-15. Точки перегиба. Асимптоты. Исследование функций.

План

1. *Исследование функции на вогнутость и выпуклость*
2. *Точки перегиба функции*
3. *Асимптоты функции*
4. *Исследование функций с помощью производной*

Пусть функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке промежутка $(a;b)$. Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен выше любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **вогнутой** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вниз").

Если на промежутке $(a;b)$ график функции $f(x)$ расположен ниже любой своей касательной, проведенной в точке этого промежутка, то функция называется **выпуклой** на этом промежутке (иногда говорят "выпуклой вверх").

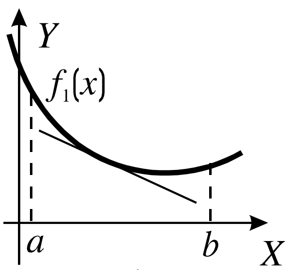


Рис.1
Функция $f_1(x)$ вогнута
на промежутке $(a;b)$

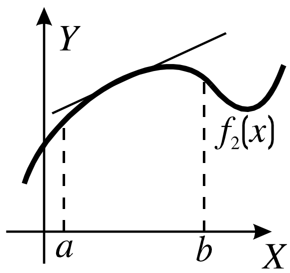


Рис. 2
Функция $f_1(x)$ выпукла
на промежутке $(a;b)$

Точка x_0 называется **точкой перегиба** функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет производную и существуют два промежутка: $(a;x_0)$ и $(x_0;b)$, на одном из которых функция выпукла, а на другом вогнута.

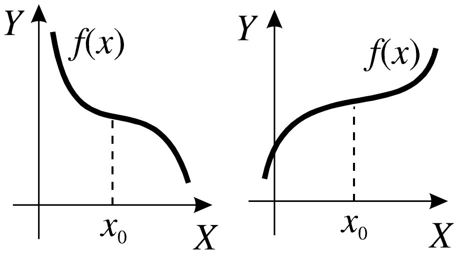


Рис. 3
Примеры точек перегиба.

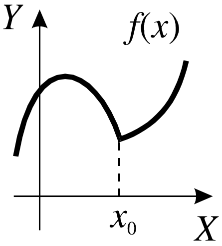


Рис..4
Угловая точка не является точкой перегиба.

Будем называть функцию **возрастающей в точке** x_0, если она непрерывна в этой точке и возрастает в некоторой ее окрестности. Подобным образом можно определить функцию, убывающую в точке.

Приведем без доказательства важную для исследования функций теорему.

Если $f''(x) > 0$ **на промежутке** $(a;b)$, **то на этом промежутке функция** $f(x)$ **вогнута**. **Если** $f''(x) < 0$ **на промежутке** $(a;b)$, **то на этом промежутке функция** $f(x)$ **выпукла**.

Из положительности второй производной функции на промежутке следует возрастание первой производной на этом промежутке, а это, как показано на рисунке 5, – признак вогнутой функции. Аналогичным образом иллюстрируется второе утверждение теоремы.

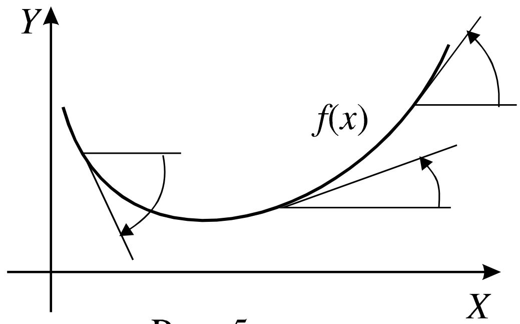


Рис. 5
Вогнутая функция.
Тангенс угла наклона касательной возрастает.

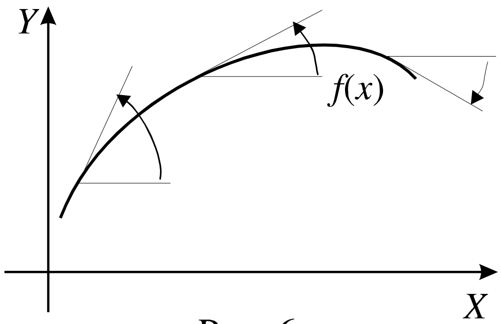


Рис. 6
Выпуклая функция.
Тангенс угла наклона касательной убывает.

Если x_0 – точка перегиба функции $f(x)$, то $f''(x_0) = 0$.

Приведем другую формулировку достаточных условий экстремума функции.

Если в точке x_0 выполняются условия:

1) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) < 0$, тогда x_0 – точка максимума;

2) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) > 0$, тогда x_0 – точка минимума;

3) $f'(x_0) = 0$; $f''(x_0) = 0$, тогда вопрос о поведении функции в точке остается открытым. Здесь может быть экстремум, например в точке $x_0 = 0$ у функции $y = x^4$, но может его не быть, например в точке $x_0 = 0$ у функции $y = x^5$. В этом случае для решения вопроса о наличии экстремума в стационарной точке можно использовать достаточные условия экстремума, приведенные выше.

Рассмотрим пример из микроэкономики.

В количественной теории полезности предполагается, что потребитель может дать количественную оценку (в некоторых единицах измерения) полезности любого количества потребляемого им товара.

Это означает существование **функции полезности** TU аргумента Q – количества купленного товара. Введём понятие **предельной полезности**, как добавочной полезности, прибавляемой каждой последней порцией товара. Далее построим двумерную систему координат, откладывая по горизонтальной оси количество потребляемого товара Q, а по вертикальной оси – общую полезность TU, как это сделано на рисунке 7. В этой системе координат проведем график функции $TU = TU(Q)$. Точка Q_0 на горизонтальной оси означает количество приобретенного товара, величина ΔQ –добавочный приобретенный товар. Разность $\Delta TU = TU(Q_0 + \Delta Q) - TU(Q_0)$ - добавочная полезность, полученная от покупки “довеска” ΔQ. Тогда добавочная полезность от последней приобретенной порции (или единицы количества) товара вычисляется по формуле $\Delta TU / \Delta Q$ (Курс экономической теории. Под общей редакцией проф. Чепурина М.Н. 1995, стр. 122). Эта дробь, как можно видеть, зависит от

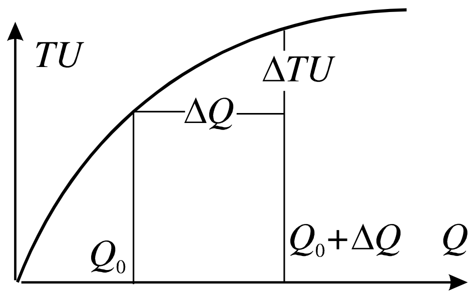


Рис. 7

величины ΔQ. Если здесь перейти к пределу при $\Delta Q \to 0$, то получится формула для определения предельной полезности MU:

$$MU = \frac{dTU}{dQ}.$$

Это означает, что **предельная полезность равна производной функции полезности** $TU(Q)$. **Закон убывающей предельной полезности** сводится к уменьшению этой производной с ростом величины Q. Отсюда следует выпуклость графика функции $TU(Q)$. Понятие функции полезности и представление предельной полезности в виде производной этой функции широко используется в математической экономике.

Асимптоты плоской кривой

Определение 1. Если точка $M(x;\, y)$ перемещается по кривой $y = f(x)$ так, что хотя бы одна из координат точки стремится к ∞ и при этом расстояние от этой точки до некоторой прямой стремится к 0, то эта прямая называется *асимптотой кривой* $y = f(x)$.

Асимптоты бывают двух видов: *вертикальные* и *наклонные*.

Определение 2. Прямая $x = a$ называется *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Замечание. Если прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, то в точке $x=a$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода. Наоборот, если в точке $x = a$ функция $f(x)$ имеет разрыв второго рода, то прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$.

Определение 3. Прямая $y = kx + b$ называется *наклонной асимптотой* кривой $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде:

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$).

Теорема 1. Для того чтобы кривая $y = f(x)$ имела наклонную асимптоту при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) необходимо и достаточно существования двух конечных пределов:

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{или } x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k \quad \text{и} \quad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (\text{или } x\to-\infty)}} (f(x) - k\cdot x) = b$$

Пример 1. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Решение.

1) $D(y) = (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2) Точки $x = -1$ и $x = 1$ являются точками разрыва второго рода, так как:

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{(-1)^3}{(-1+0-1)(-1+0+1)}\right) = \left(\frac{-1}{-2\cdot(+0)}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{(-1)^3}{(-1-0-1)(-1-0+1)}\right) = \left(\frac{-1}{-2\cdot(-0)}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1+0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to1+0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{1^3}{(1+0-1)(1+0+1)}\right) = \frac{1}{(+0)\cdot 2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to1-0} \frac{x^3}{x^2-1} = \lim_{x\to1-0} \frac{x^3}{(x-1)(x+1)} = \left(\frac{1^3}{(1-0-1)(1-0+1)}\right) = \frac{1}{(-0)\cdot 2} = -\infty$$

Поэтому прямые $x = -1$ и $x = 1$ являются *вертикальными асимптотами*.

3) Вычислим пределы:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2-1}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2x}=1,\ k=1.$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-k\cdot x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-x^3+x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}=$$

$$=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0, b=0$$

Отсюда следует, что при $x\to+\infty$ прямая $y = 1\cdot x +0$, т.е. $y = x$ – *наклонная асимптота при* $x\to+\infty$.

Найдём наклонную асимптоту при $x\to-\infty$.

Вычисляя те же пределы при $x\to-\infty$, получим $k = 1$ и $b = 0$, т.е. прямая $y = x$ является *наклонной асимптотой при* $x\to-\infty$.

Ответ: $x = \pm 1$ – вертикальные асимптоты

$y = x$ – наклонная асимптота при $x \to \pm\infty$.

1. Монотонность функции

Определение 4. Функция $y = f(x)$ называется *возрастающей (убывающей)* на промежутке $(a;b)$, если для любых x_1 и x_2, принадлежащих этому промежутку, из условия $x_2 > x_1$ следует неравенство:

$$f(x_2) > f(x_1) \quad (f(x_2) < f(x_1)).$$

Определение 5. Функция $y = f(x)$ называется *монотонной* на промежутке $(a;b)$, если она на этом промежутке является только возрастающей или только убывающей.

Теорема 2 (достаточные условия монотонности). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на промежутке $(a;b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любых $x \in (a;b)$, то функция возрастает (убывает) на этом промежутке.

Экстремумы функции

Определение 6. Функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0 \in D(f)$ *максимум* y_{max} (*минимум* $y_{\min}$), если существует такая окрестность точки x_0, в которой для всех x выполняется неравенство:

$$f(x_0) > f(x) \quad (f(x_0) < f(x)).$$

Определение 7. Точки максимума и минимума функции называются точками *экстремума функции*.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ имеет экстремум в точке x_0, то в этой точке производная функции равна нулю или не существует.

Замечание. Если $f'(x_0)$ не существует или равна ∞, то точка x_0 может быть точкой экстремума функции.

Например, функция $y = |x|$ имеет минимум при $x = 0$, хотя $y'(0)$ не существует (рис. 1).

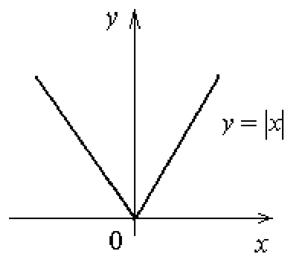


Рис. 1

Теорема 4 (достаточное условие экстремума). Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, дифференцируема в некоторой её окрестности, за исключением может быть самой этой точки, $f'(x_0) = 0$ или не существует и при переходе x через точку x_0 производная $f'(x)$ изменяет знак, то точка x_0 является точкой экстремума. Если при этом знак $f'(x)$ меняется

с $+$ на $-$, то x_0 – точка максимума,

с $-$ на $+$, то x_0 – точка минимума.

2. Выпуклость, вогнутость и точки перегиба графика функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в любой точке промежутка $(a;b)$. Тогда она имеет конечную производную в любой точке этого промежутка. Значит, существует касательная к графику функции $y = f(x)$ в любой его точке $(x; f(x))$ при $a < x < b$.

Определение 8. График функции $y = f(x)$, дифференцируемой в каждой точке промежутка $(a;b)$, называется *выпуклым (вогнутым)* на этом промежутке, если для любого $x \in (a;b)$ график расположен не выше (не ниже) касательной к графику в точке $(x; f(x))$.

Теорема 5 (достаточное условие выпуклости или вогнутости кривой). Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема на промежутке $(a;b)$ и $f''(x)$ для $x \in (a;b)$ сохраняет свой знак, тогда кривая $y = f(x)$ *выпуклая*, если $f''(x) \leq 0$

при $x \in (a;b)$, и кривая $y = f(x)$ *вогнутая*, если $f''(x) \geq 0$ при $x \in (a;b)$.

Определение 9. Пусть в точке $(x_0; f(x_0))$ существует касательная. Тогда точка $(x_0; f(x_0))$, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой (или наоборот) называется *точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$.

Теорема 6 (достаточное условие точки перегиба). Если функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема в окрестности точки x_0, вторая производная функции $f''(x_0) = 0$ (или не существует) и $f''(x)$ меняет свой знак при переходе x через точку x_0, то точка $(x_0; f(x_0))$ – точка перегиба кривой $y = f(x)$.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке

Пусть функция $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$.

Определение 10. Число $f(c)$ называется *наибольшим* (*наименьшим*) значением функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ и обозначается $\max\limits_{[a;b]} f(x)$ ($\min\limits_{[a;b]} f(x)$), если для любого $x \in [a;b]$ выполняется неравенство:

$$f(x) \le f(c) \quad (f(x) \ge f(c)) \, .$$

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то по свойству непрерывной на отрезке функции она достигает своих наибольшего и наименьшего значений.

<u>Схема нахождения этих значений следующая:</u>

1) Найти все точки, в которых $f'(x) = 0$ (или не существует). Причём выбрать те точки из полученных, которые попадают на отрезок $[a;b]$.

2) Вычислить значения функции в полученных точках в п.1.

3) Вычислить значения функции в граничных точках отрезка $[a;b]$: $f(a)$ и $f(b)$.

4) Из значений п.2 и п.3 найти наибольшее число M и наименьшее m.

Тогда $M = \max\limits_{[a;b]} f(x)$, $m = \min\limits_{[a;b]} f(x)$.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 16. Неопределенный интеграл.

План

1. *Первообразная функции*
2. *Основное свойство первообразной*
3. *Теоремы о вычислении первообразной функции.*
4. *Неопределенный интеграл*
5. *Таблица интегралов*

Функция $F(x)$ называется **первообразной для функции** $f(x)$ на промежутке $(a;b)$, если для всех $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Например, для функции x^2 первообразной будет функция $x^3/3$.

Если для $F(x)$ установлено равенство $dF(x) = f(x)dx$, то $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, так как $f(x) = \dfrac{dF(x)}{dx} = F'(x)$.

Рассмотрим две теоремы, которые называются теоремами об общем виде всех первообразных данной функции.

Теорема 1. **Если** $F(x)$ – **первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$, **то** $F(x) + C$, **где** C – **число**, **тоже первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$.

Доказательство.

$$(F + C)' = F' + C' = f + 0 = f$$

По определению $F + C$ — первообразная для f.

Прежде чем рассмотреть теорему 2, докажем две вспомогательные теоремы.

Если функция $g(x)$ **постоянна на** $(a;b)$, **то** $g'(x) = 0$.

Доказательство.

Так как $g(x) = C$, справедливы равенства: $g'(x) = C' = 0$ (здесь, как и ниже, через C обозначено произвольно выбранное число).

Если $g'(x) = 0$ **при всех** $x \in (a;b)$, **то** $g(x) = C$ **на** $(a;b)$.

Доказательство.

Пусть $g'(x) = 0$ во всех точках $(a;b)$. Зафиксируем точку $x_1 \in (a;b)$. Тогда для любой точки $x \in (a;b)$ по формуле Лагранжа имеем

$$g(x) - g(x_1) = g'(\xi)(x - x_1)$$

Так как $\xi \in (x;\ x_1)$, а точки x и x_1 принадлежат промежутку $(a;b)$, то $g'(\xi) = 0$, откуда следует, что $g(x) - g(x_1) = 0$, то есть $g(x) = g(x_1) = const$.

Теорема 2. **Если** $F(x)$ **есть первообразная для** $f(x)$ **на промежутке** $(a;b)$, **а** $G(x)$ – **другая первообразная для** $f(x)$ **на** $(a;b)$, **то** $G = F + C$, **где** C – **число**.

Доказательство.

Возьмем производную от разности $G - F$: $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$. Отсюда следует: $G - F = C$, где C — число, то есть $G = F + C$.

Множество всех первообразных для функции $f(x)$ на промежутке $(a;b)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается $\int f(x)dx$. Если $F(x)$ – первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C – произвольное число.

Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется **интегрированием**.

Из определения неопределенного интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления $F'(x) = f(x)$ соответствует формула $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ интегрального исчисления. Отсюда получается **таблица неопределенных интегралов**:

1) $\int dx = x + C$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ $(\alpha \neq 1)$;

3) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

7) $\int \cos x\, dx = \sin x + \mathrm{C}$;

8) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C$;

9) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C$;

10) $\int \dfrac{dx}{x^2 + 1} = \mathrm{arctg}x + C = -\mathrm{arcctg}x + C$;

5) $\int a^x dx = a^x \log_a e + C \quad (\alpha \neq 1)$;

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = = -\arccos x + C$;

6) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;

12) $\int \frac{dx}{x(a-x)} = \frac{1}{a} \ln \left| \frac{x}{a-x} \right| + C$.

Неопределенный интеграл обладает следующими свойствами:

1) $\left(\int f(x)\, dx \right)' = f(x)$;

2) $\int f'(x)\, dx = f(x) + C$;

3) $d \int f(x)\, dx = f(x) dx$;

4) $\int d\, f(x) = f(x) + C$;

5) $\int k f(x) dx = k \int f(x)\, dx$;

6) $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$;

7) Если $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

$(a \neq 0)$.

Все эти свойства непосредственно следуют из определения.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 17. Теоремы об интегрировании

План

1. *Замена переменной в неопределенном интеграле*
2. *Вычисление неопределенных интегралов*

Замена переменной в неопределенном интеграле

Если функция $f(x)$ непрерывна, а функция $\varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$, то имеет место формула

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt = \int f(x)\, dx, \text{ где } x = \varphi(t).$$

Можно привести примеры вычисления интеграла с помощью перехода от левой части к правой в этой формуле, а можно привести примеры обратного перехода.

Примеры. 1. $I = \int \cos(t^3)\, t^2\, dt.$ Пусть $t^3 = x$, тогда $dx = 3t^2 dt$ или $t^2 dt = dx/3$.

$$I = \int \cos x \frac{dx}{3} = \frac{1}{3}\int \cos x dx = \frac{1}{3}\sin x + C = \frac{1}{3}\sin t^3 + C.$$

2. $I = \int \frac{\ln^2 t + \sqrt{\ln t}}{t} dt$. Пусть $\ln t = x$, тогда $dx = dt/t$.

$$I = \int \left(x^2 + \sqrt{x}\right) dx = \int x^2 dx + \int \sqrt{x} dx = \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{x}^{\,3} + C =$$

$$= \frac{\ln^3 t}{3} + \frac{2}{3}\left(\sqrt{\ln t}\right)^3 + C.$$

3. $I = \int \mathrm{tg} t dt = \int \frac{\sin t}{\cos t} dt$. Пусть $x = \cos t$, тогда $dx = -\sin t\, dt$, и

$$I = \int \frac{-dx}{x} = -\int \frac{dx}{x} = -\ln|x| + C = -\ln|\cos t| + C.$$

4. $I = \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$. Пусть $x = \sin t$, тогда $dx = \cos dt$, и

$$I = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{1 - \sin^2 t}} = \int dt = t + C = \arcsin x + C.$$

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 18. Формула интегрирования по частям

План

1. *Формула интегрирования по частям*
2. *Вычисление неопределенных интегралов*

Пусть $u(x)$ и $v(x)$ — дифференцируемые на некотором промежутке функции. Тогда

$$(uv)' = u'v + v'u$$

Отсюда следует

$$\int (uv)'dx = \int (u'v + v'u)dx = \int u'v\,dx + \int v'u\,dx$$

или

$$\int uv'\,dx = uv - \int u'v\,dx .$$

Отсюда следует формула, которая называется формулой интегрирования по частям:

$$\int u(x)dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)du(x)$$

Приведем примеры применения формулы интегрирования по частям.

Примеры. 1. $I = \int x \cos x\,dx$. Пусть $u = x$; $dv = \cos x\,dx$, тогда $du = dx$; $v = \sin x$. Отсюда по формуле интегрирования по частям получается:

$$I = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C.$$

2. $I = \int (x^2 - 3x + 2)\,e^{5x}dx$. Пусть $x^2 - 3x + 2 = u$; $e^{5x}dx = dv$. Тогда $du = (2x - 3)\,dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$.

$$I = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 5x + 2\right) - \frac{1}{5}\int (2x-3)e^{5x}dx.$$

К последнему интегралу применим метод интегрирования по частям, полагая $2x - 3 = u$; $e^{5x}dx = dv$. Отсюда следует: $du = 2dx$; $v = \frac{1}{5}e^{5x}$, и окончательно получаем:

$$I = \frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2 - 3x + 2\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^{5x}(2x-3) - \frac{1}{5}\int e^{5x}2dx\right) =$$

$$=\frac{1}{5}e^{5x}\left(x^2-3x+2\right)-\frac{1}{25}e^{5x}\left(2x-3\right)-\frac{2}{25}e^{5x}+C.$$

3. $I=\int\left(x^5+\sqrt{x}\right)\ln x dx$;

$$\ln x=u; \left(x^5+\sqrt{x}\right)dx=dv;\ \frac{dx}{x}=du; \frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}=v;$$

$$I=\ln x\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-\int\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\frac{dx}{x}=$$

$$=\ln x\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)-\int\frac{x^5}{6}dx-\frac{2}{3}\int x^{\frac{1}{2}}dx=$$

$$=\left(\frac{x^6}{6}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)\ln x-\frac{x^6}{36}-\frac{4}{9}x^{\frac{3}{2}}+C.$$

В заключение покажем метод вычисления неопределенного интеграла, стоящего в приведенной выше таблице под номером 12:

$$I=\int\frac{dx}{x(a-x)}.$$

Представим дробь $\frac{1}{x(a-x)}$ в виде суммы двух дробей: $\frac{A}{x}$ и $\frac{B}{a-x}$, и попытаемся найти неизвестные величины параметров A и B. Из равенства $\frac{1}{x(a-x)}=\frac{(B-A)x+aA}{x(a-x)}$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} B-A=0 \\ aA=1 \end{cases}$$

с решением $A=\frac{1}{a}; B=\frac{1}{a}$. Отсюда следует:

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{a-x}=\frac{1}{a}\left(\ln|x|-\ln|a+x|\right)+C=\frac{1}{a}\ln\left|\frac{x}{a-x}\right|+C.$$

Полученный интеграл в обиходе обычно называют “высоким логарифмом”. Метод, которым он был найден, называется методом “неопределенных коэффициентов”. Этот метод применяется при вычислении интегралов от дробей с числителем и знаменателем в виде многочленов.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 19. Определенный интеграл

План

1. *Понятие интегральной суммы*
2. *Определение определенного интеграла*
3. *Определение криволинейной трапеции*

Пусть на промежутке $[a;b]$ задана функция $f(x)$. Будем считать функцию непрерывной, хотя это не обязательно. Выберем на промежутке $[a;b]$ произвольные числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}$, удовлетворяющие условию: $a< x_1,< x_2<\ldots< x_{n-1},<b$. Эти числа разбивают промежуток $[a;b]$ на n более мелких промежутков: $[a;x_1]$, $[x_1;x_2]$, …□$[x_{n-1};b]$. На каждом из этих промежутков выберем произвольно по одной точке: $c_1\in[a;x_1]$, $c_2\in[x_1;x_2]$, …□$c_n\in[x_{n-1};b]$.

Введем обозначения: $\Delta x_1 = x_1 - a$; $\Delta x_2 = x_2 - x_1$; …□$\Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Составим сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i .$$

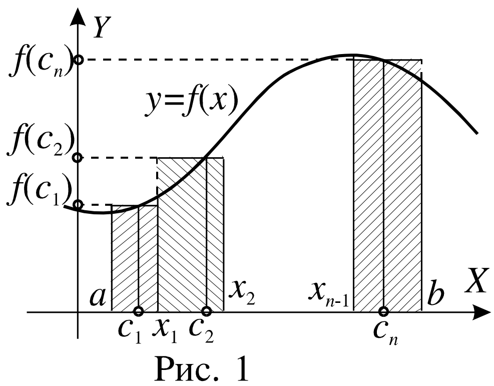


Рис. 1

Она называется **интегральной** суммой функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$. Очевидно, что интегральная сумма зависит от способа разбиения промежутка и от выбора точек c_i.

Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника, покрытого штриховкой на рисунке 1.

Введем обозначение: $\lambda = \max(\Delta x_i)$, $i = 1, 2, \ldots$□n.. Величину λ иногда называют **параметром разбиения**.

Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю. **Определенным интегралом**

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$ называется предел, к которому стремится интегральная сумма при этом процессе, если предел существует:

$$I = \lim_{n\to\infty;\lambda\to 0} \sigma.$$

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения промежутка $[a;b]$ и выбора точек c_i.

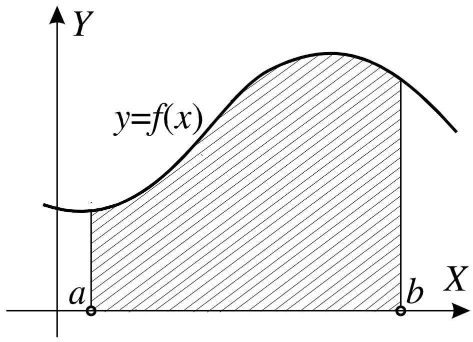


Рис. 2

Число a называется **нижним пределом интегрирования**, а число b — **верхним пределом интегрирования**.

Рассмотрим фигуру, ограниченную графиком непрерывной, неотрицательной на промежутке $[a;b]$ функции $f(x)$, отрезком $[a;b]$ оси X, и прямыми $x = a$; $x = b$. Такую фигуру называют криволинейной трапецией. На рисунке 2 криволинейная трапеция выделена штриховкой. Площадь S этой трапеции определяется формулой

$$S = I = \int_a^b f(x)dx.$$

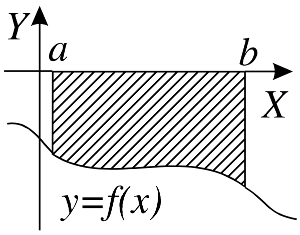


Рис. 3

Если $f(x) < 0$ во всех точках промежутка $[a;b]$ и непрерывна на этом промежутке (например, как изображено на рисунке 3), то площадь криволинейной трапеции, ограниченной отрезком $[a;b]$ горизонтальной оси координат, прямыми $x = a$; $x = b$ и графиком функции $y = f(x)$, определяется формулой

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 20. Основные свойства определенного интеграла

План

1. *Свойства определенного интеграла*
2. *Формула Ньютона-Лейбница*

Перечислим свойства определенного интеграла:

1) $\int\limits_a^b kf(x)dx = k\int\limits_a^b f(x)dx$ (здесь k - произвольное число);

2) $\int\limits_a^b \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)dx$;

3) $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

4) Если $c\in[a;b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$.

Из этих свойств следует, например, что $\int\limits_0^{2\pi} \sin x\, dx = 0$.

Все приведенные выше свойства непосредственно следуют из определения определенного интеграла.

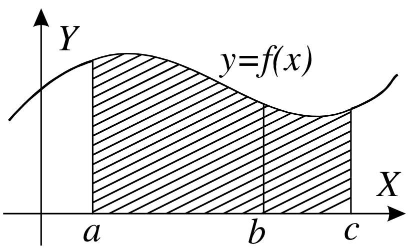


Рис. 4

Оказывается, что формула из пункта 4 справедлива и тогда, когда $c\notin[a;b]$. Пусть, например, $c>b$, как изображено на рисунке 4. В этом случае верны равенства

$$\int\limits_a^b = \int\limits_a^c - \int\limits_b^c = \int\limits_a^c + \int\limits_c^b .$$

Определенный интеграл как функция верхнего предела

Пусть функция $f(t)$ определена и непрерывна на некотором промежутке, содержащем точку a. Тогда каждому числу x из этого промежутка можно поставить в соответствие число

$$I(x)=\int_a^x f(t)dt,$$

определив тем самым на промежутке функцию $I(x)$, которая называется определенным интегралом с переменным верхним пределом. Отметим, что в точке $x=a$ эта функция равна нулю. Вычислим производную этой функции в точке x. Для этого сначала рассмотрим приращение функции в точке x при приращении аргумента Δx:

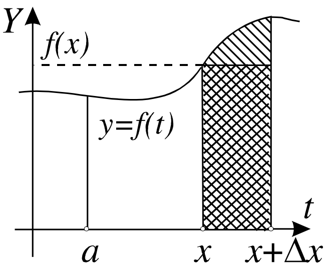


Рис. 1

$$\Delta I(x) = I(x + \Delta x) - I(x) =$$

$$= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$$

$$= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Как показано на рисунке 1, величина последнего интеграла в формуле для приращения $\Delta I(x)$ равна площади криволинейной трапеции, отмеченной штриховкой. При малых величинах Δx (здесь, так же как и везде в этом курсе, говоря о малых величинах приращений аргумента или функции, имеем в виду абсолютные величины приращений, так как сами приращения могут быть и положительными и отрицательными) эта площадь оказывается приблизительно равной площади прямоугольника, отмеченного на рисунке двойной штриховкой. Площадь прямоугольника определяется формулой $f(x)\Delta x$. Отсюда получаем соотношение

$$\Delta I(x)=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \approx f(x)\Delta x.$$

В последнем приближенном равенстве точность приближения тем выше, чем меньше величина Δx.

Из сказанного следует формула для производной функции $I(x)$:

$$I'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta I(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x)\Delta x}{\Delta x}=f(x).$$

Производная определенного интеграла по верхнему пределу в точке x равна значению подынтегральной функции в точке x. Отсюда следует, что функция $I(x)=\int_a^x f(t)dt$ является первообразной для функции $f(x)$, причем такой первообразной, которая принимает в точке $x = a$ значение, равное нулю. Этот факт дает возможность представить определенный интеграл в виде

$$\int_a^x f(t)dt = I(x) - I(a). \qquad (1)$$

Пусть $F(x)$ тоже является первообразной для функции $f(x)$, тогда по теореме об общем виде всех первообразных функции $I(x) = F(x) + C$, где C — некоторое число. При этом правая часть формулы (1) принимает вид

$$I(x) - I(a) = F(x) + C - (F(a) + C) = F(x) - F(a). \qquad (2)$$

Из формул (1) и (2) после замены x на b следует формула для вычисления определенного интеграла от функции $f(t)$ по промежутку $[a;b]$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

которая называется формулой **Ньютона-Лейбница**. Здесь $F(x)$ — любая первообразная функции $f(x)$.

Для того, чтобы вычислить определенный интеграл от функции $f(x)$ по промежутку $[a;b]$, нужно найти какую-либо первообразную $F(x)$ функции $f(x)$ и подсчитать разность значений первообразной в точках b и a. Разность этих значений первообразной принято обозначать символом $F(x)\Big|_a^b$.

Приведем примеры вычисления определенных интегралов с помощью формулы Ньютона-Лейбница.

Примеры. 1. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = \sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1$.

2. $I = \int_0^1 xe^x dx$.

Сначала вычислим неопределенный интеграл от функции $f(x) = xe^x$. Используя метод интегрирования по частям, получаем: $\int xe^x dx = e^x(x-1) + C$. В качестве первообразной функции $f(x)$ выберем функцию $e^x(x-1)$ и применим формулу Ньютона-Лейбница:

$$I = e^x(x-1)\Big|_0^1 = 1.$$

При вычислении определенных интегралов можно применять **формулу замены переменной в определенном интеграле**:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\ \ (t))\ \ '(t)dt\ .$$

Здесь α и β определяются, соответственно, из уравнений $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$, а функции f, φ, φ' должны быть непрерывны на соответствующих промежутках.

Пример: $I = \int_1^e \frac{\ln x dx}{x}$.

Сделаем замену: $\ln x = t$ или $x = e^t$, тогда если $x = 1$, то $t = 0$, а если $x = e$, то $t = 1$. В результате получим:

$$I = \int_0^1 \frac{\ln e^t e^t dt}{e^t} = \int_0^1 t dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

При замене переменной в определенном интеграле не нужно возвращаться к исходной переменной интегрирования.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

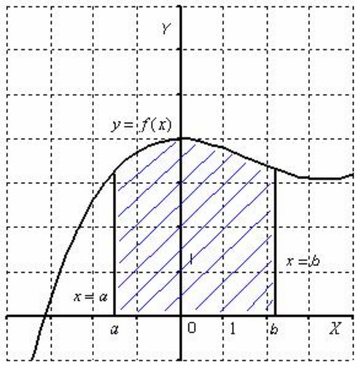
Занятие 21. Приложения определенного интеграла в геометрии

План

1. Формула площади криволинейной трапеции

2. Приложение интеграла к вычислению площадей плоских фигур

Криволинейной трапецией *называется плоская фигура, ограниченная осью* OX, *прямыми* $x = a$, $x = b$ *и графиком непрерывной на отрезке* $[a;b]$ *функции* $y = f(x)$, *которая не меняет знак на этом промежутке.* Пусть данная фигура расположена *не ниже* оси абсцисс:

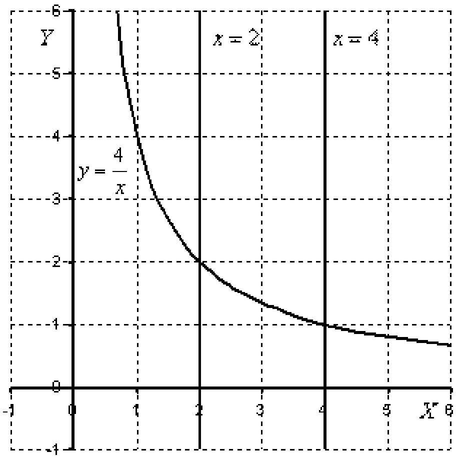


Тогда площадь криволинейной трапеции численно равна определенному интегралу $\int_a^b f(x)dx$.

Пример 1

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = 2$, $x = 4$ *и осью* OX

Решение:
Выполним чертеж:



На отрезке $[2;4]$ *график функции* $y=\dfrac{4}{x}$ *расположен над осью* OX*, поэтому:*

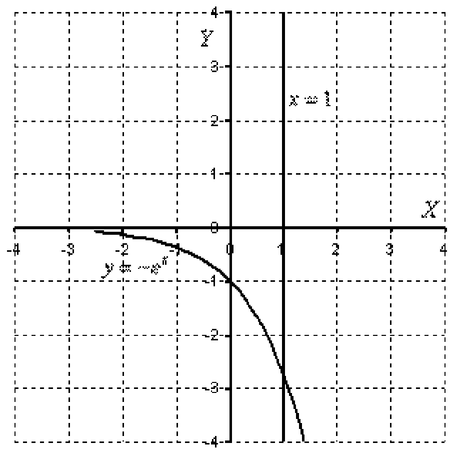
$$S=\int_2^4 \frac{4dx}{x}=4(\ln x)\Big|_2^4=4(\ln 4-\ln 2)=4\ln\frac{4}{2}=4\ln 2$$

Ответ: $S=4\ln 2\ ед^2 \approx 2{,}77\ ед^2$

Пример 2

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=-e^x$, $x=1$ и координатными осями.

Решение: Выполним чертеж:



Если криволинейная трапеция расположена под осью OX (или, по крайней мере, *не выше* данной оси), то её площадь можно найти по формуле: $S=-\int_a^b f(x)dx$

В данном случае: $S=-\int_0^1(-e^x)dx=\int_0^1 e^x dx=e^x\Big|_0^1=e^1-e^0=e-1$

Ответ: $S=(e-1)\ ед^2\approx 1{,}72\ ед^2$

Пример 3

Найти площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$, $y=-x$.

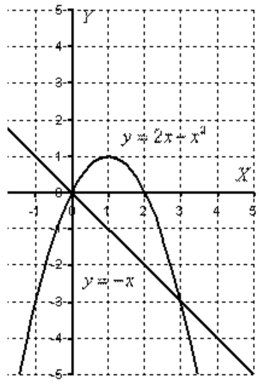
Решение: Найдем точки пересечения параболы $y=2x-x^2$ и прямой $y=-x$. Это можно Решаем уравнение:

$2x-x^2=-x$

$3x-x^2=0$

$x(3-x)=0$

$x_1=0,\ x_2=3$



Если на отрезке $[a;b]$ некоторая непрерывная функция $f(x)$ больше либо равна некоторой непрерывной функции $g(x)$, то площадь фигуры, ограниченной графиками данных функций и прямыми $x=a$, $x=b$, можно найти по формуле: $S=\int_a^b (f(x)-g(x))dx$

Искомая фигура ограничена параболой $y=2x-x^2$ сверху и прямой $y=-x$ снизу.

На отрезке $[0;3]$ $2x-x^2\geq -x$, по соответствующей формуле:

$$S=\int_0^3 (2x-x^2-(-x))dx=\int_0^3 (3x-x^2)dx=\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\frac{27}{2}-\frac{27}{3}-0+0=\frac{9}{2}=4\frac{1}{2}$$

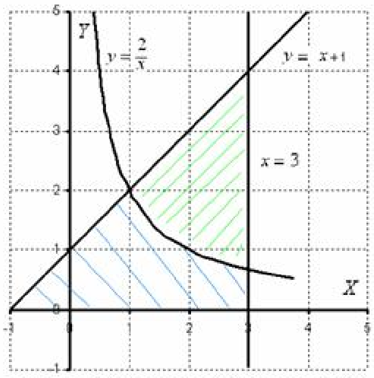
Ответ: $S=4\frac{1}{2}$ $ед^2$

А сейчас пара примеров для самостоятельного решения

<u>Пример 4</u>

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{2}{x}$, $y=x+1$, $y=0$, $x=3$.

Решение: Сначала выполним чертеж:



Площадь фигуры считается с помощью двух определенных интегралов. Действительно:

1) На отрезке $[-1;1]$ над осью OX расположен график прямой $y = x+1$;

2) На отрезке $[1;3]$ над осью OX расположен график гиперболы $y = \frac{2}{x}$.

Совершенно очевидно, что площади можно (и нужно) приплюсовать, поэтому:

$$S = \int_{-1}^{1}(x+1)dx + \int_{1}^{3}\frac{2dx}{x} = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Big|_{-1}^{1} + 2(\ln x)\Big|_{1}^{3} = \frac{1}{2}+1-\left(\frac{1}{2}-1\right)+2(\ln 3-\ln 1) =$$

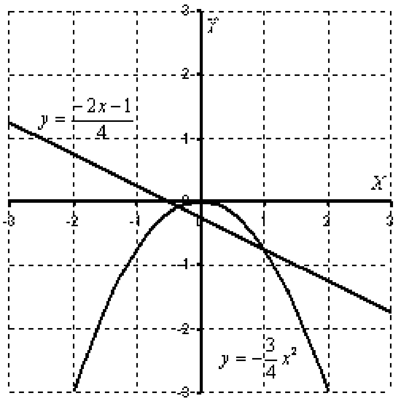
$$= \frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}+1+2(\ln 3-0) = 2+2\ln 3 = 2(1+\ln 3)$$

Ответ: $S = 2(1+\ln 3)\ ед^2 \approx 4{,}2\ ед^2$

<u>Пример 5</u>

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $3x^2+4y=0$, $2x+4y+1=0$

Представим уравнения в виде $y=-\frac{3}{4}x^2$, $y=\frac{-2x-1}{4}$ и выполним поточечный чертеж:



Найдем точки пересечения прямой $y=\frac{-2x-1}{4}$ и параболы $y=-\frac{3}{4}x^2$. Для этого решаем уравнение:

$$\frac{-2x-1}{4} = -\frac{3}{4}x^2$$

$$3x^2 = 2x+1$$

$$3x^2-2x-1=0$$

$$D = 4+12=16;\ \sqrt{D}=4$$

$$x_{1,2}=\frac{2\pm 4}{6}$$

$$x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=1$$

На отрезке $\left[-\frac{1}{3};1\right]$ $-\frac{3}{4}x^2 \geq \frac{-2x-1}{4}$, по соответствующей формуле:

$$S = \int_{-1/3}^{1}\left(-\frac{3}{4}x^2-\left(-\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\right)\right)dx = \int_{-1/3}^{1}\left(\frac{1}{4}+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}x^2\right)dx = \left(\frac{x}{4}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{4}\right)\Big|_{-1/3}^{1} =$$

$$= \frac{1}{4}(x+x^2-x^3)\Big|_{-1/3}^{1} = \frac{1}{4}\left(1+1-1-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)\right) = \frac{1}{4}\left(1+\frac{5}{27}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{32}{27} = \frac{8}{27}$$

Ответ: $S = \frac{8}{27}$ $ед.^2 \approx 0{,}3$ $ед.^2$

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятия 22-24. Элементы комбинаторики. Формулы числа перестановок, размещений, сочетаний. Решение комбинаторных задач.

План

1. *Перестановки*
2. *Размещения*
3. *Сочетания*
4. *Решение комбинаторных задач*

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Обозначим его U_n. **Перестановкой** из n элементов называется заданный порядок во множестве U_n.

Примеры перестановок:

1)распределение n различных должностей среди n человек;

2)расположение n различных предметов в одном ряду.

Сколько различных перестановок можно образовать во множестве U_n? Число перестановок обозначается P_n (читается P из n).

Чтобы вывести формулу числа перестановок, представим себе n ячеек, пронумерованных числами 1,2,...n. Все перестановки будем образовывать, располагая элементы U_n в этих ячейках. В первую ячейку можно занести любой из n элементов (иначе: первую ячейку можно заполнить n различными способами). Заполнив первую ячейку, можно n-1 способом заполнить вторую ячейку (иначе: при каждом способе заполнения первой ячейки находится n-1 способов заполнения второй ячейки). Таким образом существует $n(n-1)$ способов заполнения двух первых ячеек. При заполнении первых двух ячеек можно найти n-2 способов заполнения третьей ячейки, откуда получается, что три ячейки можно заполнить $n(n-1)(n-2)$ способами. Продолжая этот процесс, получим, что число способов заполнения n ячеек равно $n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1$. Отсюда

$$P_n = n(n - 1)(n - 2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

Число $n(n - 1)(n - 2)\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$, то есть произведение всех натуральных чисел от 1 до n, называется "n-факториал" и обозначается $n!$. Отсюда $P_n = n!$

Пример. $5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 = 120$.

По определению считается: $1!=1$; $0!=1$.

Размещениями из n элементов по k элементов будем называть упорядоченные подмножества, состоящие из k элементов, множества U_n - (множества, состоящего из n элементов). Число размещений из n элементов по k элементов обозначается A_n^k (читается "A из n по k").

Примеры задач, приводящих к необходимости подсчета

1) Сколькими способами можно выбрать из 15 человек 5 кандидатов и назначить их на 5 различных должностей?

2) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 и расставить их в ряд на полке?

В задачах о размещениях полагается $k<n$. В случае, если $k=n$, то легко получить $A_n^k = P_n = n!$

Для подсчета A_n^k используем тот же метод, что использовался для подсчета P_n ,только здесь возьмем лишь k ячеек. Первую ячейку можно заполнить n способами, вторую, при заполненной первой, можно заполнить

n-1 способами. Можно продолжать этот процесс до заполнения последней k-й ячейки. Эту ячейку при заполненных первых k-1 ячейках можно заполнить n-(k-1) способами (или n-k+1). Таким образом все k ячеек заполняются числом способов, равным

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+2)(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

Отсюда получаем: $A_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!}$

Пример. Сколько существует различных вариантов выбора 4-х кандидатур из 9-ти специалистов для поездки в 4 различных страны?

$$A_9^4=\frac{9!}{(9-4)!}=\frac{9!}{5!}=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3024$$

Сочетаниями из n элементов по k элементов называются подмножества, состоящие из k элементов множества U_n (множества, состоящего из n элементов).

Одно сочетание от другого отличается только составом выбранных элементов (но не порядком их расположения, как у размещений).

Число сочетаний из n элементов по k элементов обозначается C_n^k (читается "C из n по k").

Примеры задач, приводящих к необходимости подсчета числа сочетаний:

1) Сколькими способами можно из 15 человек выбрать 6 кандидатов для назначения на работу в одинаковых должностях?

2) Сколькими способами можно из 20 книг отобрать 12 книг?

Выведем формулу для подсчета числа сочетаний. Пусть имеется множество U_n и нужно образовать упорядоченное подмножество множества U_n, содержащее k элементов (то есть образовать размещение). Делаем это так:

1) выделим какие-либо k элементов из n элементов множества U_n Это, согласно сказанному выше, можно сделать C_n^k способами;

2) упорядочим выделенные k элементов, что можно сделать $P_k = k!$ способами. Всего можно получить $C_n^k \cdot P_k$ вариантов (упорядоченных подмножеств), откуда следует: $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$,то есть

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$$

Пример: 6 человек из 15 можно выбрать числом способов, равным

$$C_{15}^6 = \frac{15!}{9!\,6!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 5005$$

Задачи на подсчет числа подмножеств конечного множества называются комбинаторными. Рассмотрим некоторые комбинаторные задачи.

1.Из семи заводов организация должна выбрать три для размещения трех различных заказов. Сколькими способами можно разместить заказы?

Так как все заводы различны, и из условия ясно, что каждый завод может либо получить один заказ, либо не получить ни одного, здесь нужно считать число размещений

$$A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$$

2.Если из текста задачи 1 убрать условие различия трех заказов, сохранив все остальные условия, получим другую задачу. Теперь способ размещения заказов определяется только выбором тройки заводов, так как все эти заводы получат одинаковые заказы, и число вариантов определяется как число сочетаний.

$$C_7^3 = \frac{7!}{4! \cdot 3!} = 35$$

3.Имеются 7 заводов. Сколькими способами организация может разместить на них три различных производственных заказа? (Заказ нельзя дробить, то есть распределять его на несколько заводов).

В отличие от условия первой задачи, здесь организация может отдать все три заказа первому заводу или, например, отдать два заказа второму заводу, а один - седьмому.

Задача решается так. Первый заказ может быть размещен семью различными способами (на первом заводе, на втором и т.д.). Разместив первый заказ, имеем семь вариантов размещения второго (иначе, каждый способ размещения первого заказа может сопровождаться семью способами размещения второго). Таким образом, существует 7·7=49 способов размещения первых двух заказов. Разместив их каким-либо образом, можем найти 7 вариантов размещения третьего (иначе, каждый способ размещения первых двух заказов может сопровождаться семью различными способами распределения третьего заказа). Следовательно, существуют $49 \cdot 7 = 7^3$ способов размещения трех заказов. (Если бы заказов было *n*, то получилось бы 7^n способов размещения).

4.Как решать задачу 3, если в ее тексте вместо слов "различных производственных заказа" поставить "одинаковых производственных заказа"?

5.Добавим к условию задачи 1 одну фразу: организация также должна распределить три различных заказа на изготовление деревянных перекрытий среди 4-х лесопилок. Сколькими способами могут быть распределены все заказы?

Каждый из A_7^3 способов распределения заказов на заводах может сопровождаться A_4^3 способами размещения заказов на лесопилках. Общее число возможных способов размещения всех заказов будет равно

$$A_7^3 \cdot A_4^3 = \frac{7!}{4!} \cdot \frac{4!}{1!} = 7!$$

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 25. События. Комбинации событий

План

1. *Понятия испытания, эксперимента*
2. *События, случайные события*
3. *Диаграмма Венна*

Случайный эксперимент, элементарные исходы, события.

Случайным (стохастическим) экспериментом или испытанием называется осуществление какого-либо комплекса условий, который можно практически или мысленно воспроизвести сколь угодно большое число раз.

Примеры случайного эксперимента: подбрасывание монеты, извлечение одной карты из перетасованной колоды, подсчет числа автомобилей в очереди на бензоколонке в данный момент.

Явления, происходящие при реализации этого комплекса условий, то есть в результате случайного эксперимента, называются **элементарными исходами**. Считается, что при проведении случайного эксперимента реализуется только один из возможных элементарных исходов.

Если монету подбросить один раз, то элементарными исходами можно считать выпадение герба (Г) или цифры (Ц).

Если случайным экспериментом считать троекратное подбрасывание монеты, то элементарными исходами можно считать следующие:

ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ.

Множество всех элементарных исходов случайного эксперимента называется **пространством элементарных исходов**. Будем обозначать пространство элементарных исходов буквой Ω (омега большая) i-й элементарный исход будем обозначать ω_i (ω-омега малая).

Если пространство элементарных исходов содержит n элементарных исходов, то

$$\Omega=(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n).$$

Для троекратного подбрасывания монеты,

$$\Omega=(ГГГ, ГГЦ,...ЦЦЦ).$$

Если случайный эксперимент - подбрасывание игральной кости, то Ω=(1,2,3,4,5,6).

Если Ω **конечно** или **счетно**, то **случайным событием** или просто **событием** называется любое подмножество Ω**.**

Множество называется счетным, если между ним и множеством N натуральных чисел можно установить взаимно-однозначное соответствие.

Пример счетного множества: множество возможных значений времени прилета инопланетян на Землю, если время отсчитывать с настоящего момента и исчислять с точностью до секунды.

Примеры несчетных множеств: множество точек на заданном отрезке, множество чисел x, удовлетворяющих неравенству $1< x \le 2$.

В случае несчетного множества Ω будем называть событиями только подмножества, удовлетворяющие некоторому условию (об этом будет сказано позже).

Приведем примеры событий. Пусть бросается игральная кость, и элементарным исходом считается выпавшее число очков: Ω=(1,2,3,4,5,6). A — событие, заключающееся в том, что выпало четное число очков: A=(2,4,6); B — событие, заключающееся в том, что выпало число очков, не меньшее 3-х: B=(3,4,5,6).

Говорят, что те исходы, из которых состоит событие A, благоприятствуют событию A.

События удобно изображать в виде рисунка, который называется **диаграммой Венна.** На рисунке 1 пространство элементарных исходов Ω изображено в виде прямоугольника, а множество элементарных исходов, благоприятствующих событию A, заключено в эллипс. Сами исходы на диаграмме Венна не изображаются, а информация о соотношении между их множествами содержится в расположении границ соответствующих областей.

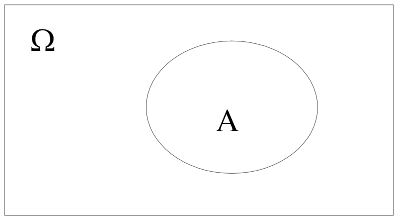


Рис.1

Суммой (объединением) двух событий A **и** B (обозначается $A \cup B$) называется событие, состоящее из всех элементарных исходов, принадлежащих по крайней мере одному из событий A или B. Событие $A \cup B$ происходит, если происходит по крайней мере одно из событий A или B.

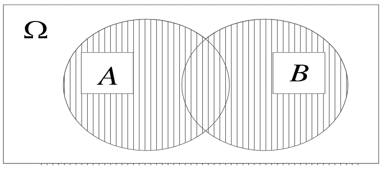


Рис.2

Приведем пример объединения событий. Пусть два стрелка стреляют в мишень одновременно, и событие A состоит в том, что в мишень попадает 1-й стрелок, а событие $\boldsymbol{B}$ - в том, что в мишень попадает 2-й. Событие $A \cup B$ означает, что мишень поражена, или, иначе, что в мишень попал хотя бы один из стрелков.

Произведением (пересечением) $A \cap B$ событий A и B называется событие, состоящее из всех тех элементарных исходов, которые принадлежат и A и B. На рисунке 3 пересечение событий A и B изображено в виде заштрихованной области. В условиях приведенного выше примера событие $A \cap B$ заключается в том, что в мишень попали оба стрелка.

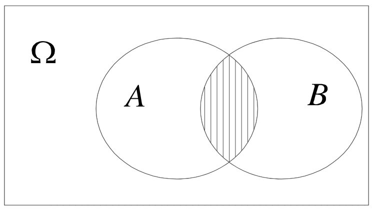


Рис.3

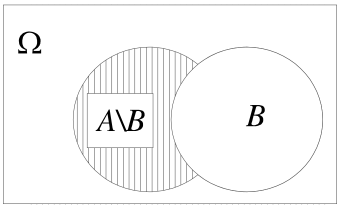


Рис.4

Разностью $A\backslash B$ или $A\text{-}B$ событий A и B называется событие, состоящее из всех исходов события A, не благоприятствующих событию B. Диаграмма Венна разности событий A и B изображена на рисунке 4.

В условиях рассмотренного выше примера событие $A\backslash B$ заключается в том, что первый стрелок попал в мишень, а второй промахнулся.

Событие Ω называется **достоверным** (оно обязательно происходит в результате случайного эксперимента).

Пустое множество ∅ называется **невозможным** событием. Событие $\overline{A}=\Omega\backslash A$ называется **противоположным** событию A или **дополнением** события A.

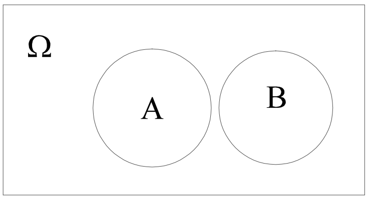


Рис.5

События A и B называются **несовместными**, если нет исходов, принадлежащих и A и B, то есть $A\cap B=\varnothing$. На рисунке 5 изображены несовместные события A и B.

Непосредственно из введенных определений следуют равенства: $A\cup\overline{A}=\Omega$; $A\cap\overline{A}=\varnothing$; $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$; $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. Два последних равенства называются формулами Де'Моргана.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 26. Вероятность события.

1. *Пространство элементарных событий*
2. *Классическое определение вероятности*

Вычислять вероятности $P(\omega_i)$ можно, используя априорный подход, который заключается в анализе специфических условий данного эксперимента (до проведения самого эксперимента).

Возможна ситуация, когда пространство элементарных исходов состоит из конечного числа N элементарных исходов, причем случайный эксперимент таков, что вероятности осуществления каждого из этих N элементарных исходов представляются равными. Примеры таких случайных экспериментов: подбрасывание симметричной монеты, бросание правильной игральной кости, случайное извлечение игральной карты из перетасованной колоды. В силу введенной аксиомы вероятности каждого элементарного исхода в этом случае равны $\frac{1}{N}$. Из этого следует, что если событие A содержит N_A элементарных исходов, то в соответствии с определением (*)

$$P(A) = \frac{N_A}{N}$$

В данном классе ситуаций вероятность события определяется как отношение числа благоприятных исходов к общему числу всех возможных исходов.

Пример. Из набора, содержащего 10 одинаковых на вид электроламп, среди которых 4 бракованных, случайным образом выбирается 5 ламп. Какова вероятность, что среди выбранных ламп будут 2 бракованные?

Прежде всего отметим, что выбор любой пятерки ламп имеет одну и ту же вероятность. Всего существует C_{10}^{5} способов составить такую пятерку, то есть случайный эксперимент в данном случае имеет C_{10}^5 равновероятных исходов.

Сколько из этих исходов удовлетворяют условию "в пятерке две бракованные лампы", то есть сколько исходов принадлежат интересующему нас событию?

Каждую интересующую нас пятерку можно составить так: выбрать две бракованные лампы, что можно сделать числом способов, равным C_4^2. Каждая пара бракованных ламп может встретиться столько раз, сколькими способами ее можно дополнить тремя не бракованными лампами, то есть $\tilde{N}_6^3$ раз. Получается, что число пятерок, содержащих две бракованные лампы, равно $C_4^2 \cdot \tilde{N}_6^3$.

Отсюда, обозначив искомую вероятность через P, получаем:

$$P = \frac{C_4^2 \cdot C_6^3}{C_{10}^5} = \frac{10}{21}$$

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятия 27-28. Сложение и умножение вероятностей

План

1. *Теорема о сложении вероятностей*
2. *Зависимые и независимые события.*
3. *Теорема об умножении вероятностей.*

Теорема сложения вероятностей несовместных событий: вероятность появления одного из двух **несовместных** событий A или *(без разницы какого)*, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

Аналогичный факт справедлив и для бОльшего количества несовместных событий, например, для трёх несовместных событий A, B и C:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C)$$

Вспомним алгебру событий: *сложение событий означает появление хотя бы одного из суммируемых событий, и, поскольку события в данном случае НЕсовместны, то одного и только одного из этих событий (безразлично какого).*

Следует отметить, что для <u>совместных</u> событий равенство $P(A+B)=P(A)+P(B)$ будет *неверным*.

Игральный кубик с полной группой событий $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, которые состоят в том, что при его броске выпадут 1, 2, 3, 4, 5 и 6 очков соответственно.

Рассмотрим событие $B_{5,6}$ – в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков. Данное событие состоит в двух несовместных исходах: $B_{5,6}=B_5+B_6$ *(выпадет 5 или 6 очков)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(B_5+B_6)=P(B_5)+P(B_6)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет не менее пяти очков.

Рассмотрим событие $B_{1-4}=B_1+B_2+B_3+B_4$, состоящее в том, что выпадет не более 4 очков и найдем его вероятность. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$$P(B_1+B_2+B_3+B_4)=P(B_1)+P(B_2)+P(B_3)+P(B_4)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$$

По той же теореме, вероятность того, что выпадет нечётное число очков:

$P(B_1+B_3+B_5)=P(B_1)+P(B_3)+P(B_5)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$ и так далее.

С помощью рассматриваемой теоремы можно решить некоторые задачи, которые нам встретились на практикуме по <u>классическому определению вероятности</u>. Не поленюсь, кратко перескажу решение 13-го примера вышеуказанного урока:

«Студент знает ответы на 25 экзаменационных вопросов из 60. Какова вероятность сдать экзамен, если для этого необходимо ответить не менее чем на 2 из 3 вопросов?»

В той задаче мы сначала нашли C_{60}^3 *(количество всех возможных <u>сочетаний</u> трёх вопросов)*, затем вычислили $C_{25}^2\cdot C_{35}^1+C_{25}^3$ количество благоприятствующих исходов и вероятность $p=\frac{C_{25}^2\cdot C_{35}^1+C_{25}^3}{C_{60}^3}$ того, что студент сдаст экзамен.

Но здесь вместо правила сложений комбинаций в ходу и другая схема рассуждений. Рассмотрим два несовместных события:

A – студент ответит на два вопроса из трёх;

B – студент ответит на все три вопроса.

Теперь, пользуясь классическим определением, найдём их вероятности:

$P(A)=\frac{C_{25}^{2}\cdot C_{35}^{1}}{C_{60}^{3}}$, $P(B)=\frac{C_{25}^{3}}{C_{60}^{3}}$

Факт успешной сдачи экзамена выражается суммой $A+B$ *(ответ на 2 вопроса из 3 или на все вопросы)*. По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(A+B)=P(A)+P(B)=\frac{C_{25}^{2}\cdot C_{35}^{1}}{C_{60}^{3}}+\frac{C_{25}^{3}}{C_{60}^{3}}$ – вероятность того, что студент сдаст экзамен.

Этот способ решения совершенно равноценен, выбирайте, какой больше нравится.

<u>Задача 1</u>

Магазин получил продукцию в ящиках с четырех оптовых складов: четыре с 1-го, пять со 2-го, семь с 3-го и четыре с 4-го. Случайным образом выбран ящик для продажи. Какова вероятность того, что это будет ящик с первого или третьего склада.

Решение: всего получено магазином: 4 + 5 + 7 + 4 = 20 ящиков.

$p_1=\frac{4}{20}=0{,}2$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 1-го склада;

$p_3=\frac{7}{20}=0{,}35$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с 3-го склада.

По теореме сложения несовместных событий: $p=p_1+p_3=0{,}2+0{,}35=0{,}55$ – вероятность того, что для продажи будет выбран ящик с первого или третьего склада.

Ответ: 0,55

<u>Задача 2</u>

В коробке 10 красных и 6 синих пуговиц. Наудачу извлекаются две пуговицы. Какова вероятность того, что они будут одноцветными?

Решение: *всего: 10 + 6 = 16 пуговиц в коробке.*

$C_{16}^2 = \frac{16!}{14! \cdot 2!} = \frac{15 \cdot 16}{2} = 120$ *способами можно извлечь 2 пуговицы из коробки;*

$C_{10}^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 45$ *способами можно извлечь 2 красные пуговицы;*

$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15$ *способами можно извлечь 2 синие пуговицы.*

По классическому определению:

$p_K = \frac{C_{10}^2}{C_{16}^2} = \frac{45}{120} = \frac{3}{8}$ *– вероятность того, что из коробки будут извлечены две красные пуговицы;*

$p_C = \frac{C_6^2}{C_{16}^2} = \frac{15}{120} = \frac{1}{8}$ *– вероятность того, что из коробки будут извлечены две синие пуговицы.*

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$p = p_K + p_C = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ *– вероятность того, что из коробки будут извлечены две одноцветные пуговицы.*

Ответ: *0,5*

Зависимые и независимые события

События являются **независимыми**, *если вероятность наступления <u>любого из них не зависит</u> от появления/непоявления остальных событий рассматриваемого множества (во всех возможных комбинациях).*

Теорема умножения вероятностей независимых событий: вероятность совместного появления независимых событий A и B равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

Вернёмся к простейшему примеру 1-го урока, в котором подбрасываются две монеты и следующим событиям:

A_1 – на 1-й монете выпадет орёл;

A_2 – на 2-й монете выпадет орёл.

Найдём вероятность события A_1A_2 (на 1-й монете появится орёл и на 2-й монете появится орёл*)*. Вероятность выпадения орла на одной монете никак не зависит от результата броска другой монеты, следовательно, события A_1 и A_2 независимы. По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(A_1A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Аналогично:

$P(\overline{A}_1\overline{A}_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете выпадет решка **и** на 2-й решка;

$P(A_1\overline{A}_2) = P(A_1) \cdot P(\overline{A}_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится орёл **и** на 2-й решка;

$P(\overline{A}_1A_2) = P(\overline{A}_1) \cdot P(A_2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ – вероятность того, что на 1-й монете появится решка **и** на 2-й орёл.

Заметьте, что события $A_1A_2,\ \overline{A}_1\overline{A}_2,\ A_1\overline{A}_2,\ \overline{A}_1A_2$ образуют *полную группу* и сумма их вероятностей равна единице: $P(A_1A_2) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2) + P(A_1\overline{A}_2) + P(\overline{A}_1A_2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$.

Теорема умножения очевидным образом распространяется и на бОльшее количество независимых событий, так, например, если события A, B, C независимы, то вероятность их совместного наступления равна: $P(ABC) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$.

Задача 3

В каждом из трех ящиков имеется по 10 деталей. В первом ящике 8 стандартных деталей, во втором – 7, в третьем – 9. Из каждого ящика наудачу извлекают по одной детали. Найти вероятность того, что все детали окажутся стандартными.

Решение: вероятность извлечения стандартной или нестандартной детали из любого ящика не зависит от того, какие детали будут извлечены из других ящиков, поэтому в задаче речь идёт о независимых событиях. Рассмотрим следующие независимые события:

S_1 – из 1-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_2 – из 2-го ящика извлечена стандартная деталь;

S_3 – из 3-го ящика извлечена стандартная деталь.

По классическому определению:

$P(S_1) = \frac{8}{10} = 0{,}8; \quad P(S_2) = \frac{7}{10} = 0{,}7; \quad P(S_3) = \frac{9}{10} = 0{,}9$ – соответствующие вероятности.

Интересующее нас событие *(из 1-го ящика будет извлечена стандартная деталь **и** из 2-го стандартная **и** из 3-го стандартная)* выражается произведением $S_1S_2S_3$.

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$P(S_1S_2S_3) = P(S_1) \cdot P(S_2) \cdot P(S_3) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}504$ – вероятность того, что из трёх ящиков будет извлечено по одной стандартной детали.

Ответ: 0,504

Задача 4

В трех урнах имеется по 6 белых и по 4 черных шара. Из каждой урны извлекают наудачу по одному шару. Найти вероятность того, что: а) все три шара будут белыми; б) все три шара будут одного цвета.

***Решение**: рассмотрим события:* A_1, A_2, A_3 *– из 1-й, 2-й и 3-й урны соответственно будет извлечён белый шар. По классическому определению вероятности:*

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Тогда вероятности извлечения чёрного шара из соответствующих урн равны:

$$P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$$

а) Рассмотрим событие: B *– из каждой урны будет извлечено по 1 белому шару.*

Данное событие выражается в виде произведения $B = A_1A_2A_3$ *(из 1-й урны будет извлечён БШ **и** из 2-й урны будет извлечён БШ **и** из 3-й урны будет извлечён БШ).*

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(B) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}216$$

б) Рассмотрим событие C *– из каждой урны будет извлечено по 1 чёрному шару.*

По теореме умножения вероятностей независимых событий:

$$P(C) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}064$$

Рассмотрим событие D *– все три шара будут одного цвета. Данное событие состоит в двух несовместных исходах:* $D = B + C$ *(будут извлечены 3 белых **или** 3 чёрных шара)*

По теореме сложения вероятностей несовместных событий:

$P(D) = P(B + C) = P(B) + P(C) = 0{,}216 + 0{,}064 = 0{,}28$

Ответ: а) 0,216; б) 0,28

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 29. Статистическая вероятность

План

1. *Относительная частота события*
2. *Определение статистической вероятности*

Вероятность наступления события A в некотором испытании – есть отношение $P(A) = \frac{m}{n}$, где: n – общее число всех равновозможных, элементарных исходов этого испытания, которые образуют полную группу событий; m – количество элементарных исходов, благоприятствующих событию A.

Примеры:

$P(A_o) = \frac{1}{2}$ – вероятность того, что в результате броска монеты выпадет «орёл»;

$P(B_5) = \frac{1}{6}$ – вероятность того, что в результате броска игральной кости выпадет 5 очков;

Классическое определение, как правило, оценивает вероятность **ДО** проведения испытаний и даже без их фактического проведения. То есть, монета ещё не подброшена, а вероятность появления орла мы уже прекрасно знаем. Можно дать зарок никогда не брать в руки кубик либо колоду карт, однако, вероятности событий B_5, C_T беспроблемно рассчитываются и без этого.

Примечание: *однако, в отсутствии информации о результате испытания фразу «Вероятность того, что монета упала орлом» (например) всё же нельзя признать некорректной. То есть классическое определение может оценивать вероятность и после реального опыта.*

Почему такое возможно? Такое возможно потому, что все элементарные исходы известны и подсчитаны заранее:

орёл и решка – итого 2 элементарных исхода;

1, 2, 3, 4, 5, 6 – 6 элементарных исходов

Кроме того, для применения классического определения вероятности необходима равновозможность элементарных исходов. Равновозможность выпадения граней монеты либо кубика обуславливается симметрией и несмещённым центром тяжести

В реальной жизни подобные модели встречаются нечасто. В большинстве ситуаций элементарные исходы перечислить затруднительно или невозможно, и ещё труднее обосновать их равновозможность. Простой пример:

Штирлиц пошёл в лес за грибами. Найти вероятность того, что он найдёт подберёзовик.

Совершенно понятно, что все грибы в лесу *(общее количество элементарных исходов)* пересчитать практически невозможно, а значит, классическое определение вероятности не срабатывает. И даже если группа разведчиков учтёт все грибы в небольшой роще, классифицирует их по видам, то препятствием станет неравновозможность исходов. Почему? Поляна мухоморов намного заметнее, чем замаскировавшиеся подберёзовики.

Вновь обратим внимание на шаблонные формулировки:

«Стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,8»; «Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке составляет 0,05».

Возникает вопрос, откуда взялись эти значения? Примеры не так надуманны, как кажется, и ответ один: данные вероятности могли получиться только на основе проведённых ранее опытов.

Относительная частота события и статистическая вероятность

Относительной частотой *события A называют отношение числа испытаний m, в которых данное событие появилось, к общему числу n фактически проведённых испытаний:*

$W(A) = \frac{m}{n}$, или короче: $\omega = \frac{m}{n}$

Относительная частота наряду с ***вероятностью*** является одним из ключевых понятий теории веротятностей, но если классическое либо геометрическое определение вероятности не требуют проведения испытаний, то относительная частота рассчитывается исключительно ПОСЛЕ опытов на основе фактически полученных данных.

В том случае, если серии испытаний проводятся в неизменных условиях, то относительная частота обнаруживает свойство ***устойчивости***, то есть колеблется около определённого значения.

Пусть некий профессиональный стрелок произвёл 100 выстрелов по мишени и попал 83 раза. Тогда относительная частота поражения цели составит: $\omega = \frac{83}{100} = 0{,}83$.

Предположим, что тот же самый стрелок в точно такой же «форме» и в приблизительно таких же условиях снова провёл серию из 100 выстрелов. Вероятно ли, что он снова попадёт 83 раза? Не очень. Но количество попаданий вряд ли будет сильно отличаться от предыдущего результата. Пусть, например, стрелок попал 79 раз. Тогда относительная частота поражения цели составит: $\omega = \frac{79}{100} = 0{,}79$.

В третьей серии из 100 выстрелов, проведённой при похожих обстоятельствах, данный стрелок попал 81 раз, $\omega = \frac{81}{100} = 0{,}81$ и т.д.

Иногда могут случаться блестящие серии более 90 попаданий, иногда «провалы», но среднее количество попаданий будет варьироваться около 80. И когда количество фактически проведённых испытаний станет достаточно большим, то речь зайдёт о ***статистической вероятности***. *Если в одинаковых (примерно одинаковых) условиях проведено достаточно много испытаний, то за* ***статистическую вероятность события*** *принимают относительную частоту данного события либо близкое число.*

Предположим, что на протяжении нескольких лет наш спортсмен, сохраняя стабильный уровень подготовки, совершил 10000 выстрелов и попал 8037 раз. Относительная частота поражения цели составит: $\omega = \frac{8037}{10000} = 0{,}8037$ и за статистическую вероятность его результативности целесообразно принять $p = 0{,}8$, которая становится теоретической оценкой, например, перед грядущими соревнованиями.

Именно так собирается богатая спортивная статистика в различных видах спорта.

Аналогичная история с утверждением *«Вероятность изготовления бракованной детали на данном станке равна 0,05»*. Эту оценку невозможно получить с помощью классического определения вероятности – она следует только из практики! Если на станке произведены десятки тысяч деталей и на каждую, скажем, тысячу выпущенных деталей, приходится в среднем 50 бракованных, то в качестве статистической вероятности брака принимается значения $p = 0{,}05$.

В учебном пособии *В.Е. Гмурмана* есть весьма удачный пример, в котором продемонстрировано, как при подбрасывании монеты относительная частота появления орла приближается к своей вероятности $p = \frac{1}{2}$ *(полученной по классическому определению)*:

Количество бросков монеты, n	Число появлений орла, m	Относительная частота, $\omega = \frac{m}{n}$
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5016
24000	12012	0,5005

Какой можно сделать вывод? С увеличением количества независимых испытаний случайность превращается в закономерность. Однако следует помнить, что порядок выпадения орлов непредсказуем.

Вернёмся к европейской рулетке с 18 красными, 18 чёрными секторами и 1 зеро. В самом примитивном варианте игры: ставим на «красное» или «чёрное», и если шарик остановился на секторе другого цвета (вероятность $q = \frac{19}{37} \approx 0{,}5135$) – ставка проигрывается. В случае успеха – удваиваемся (вероятность $p = \frac{18}{37} \approx 0{,}4865$).

Другой, во многом условный, пример: пусть в некой лотерее приняло участие $n = 629911$ билетов, из которых $m = 192833$ выиграли хоть какой-то приз. Таким образом, относительная частота выигрыша составила: $\omega = \frac{192833}{629911} \approx 0{,}306127$. Поскольку билетов продано очень много, то с большой вероятностью можно утверждать, что в будущем при сопоставимых объемах продаж доля выигравших билетов будет примерно такой же, и за статистическую вероятность выигрыша удобно принять значение $p = 0{,}3$.

Организатор лотереи знает, что из миллиона проданных билетов выиграют около 300 тысяч с небольшим отклонением. И это закономерность. Но всем участникам лотереи достаётся…. – правильно, случайность! То есть, если вы купите 10 билетов, то это ещё не значит, что выиграют 3 билета. Так, например, по формуле Бернулли нетрудно подсчитать, что выигрыш только по одному билету из десяти – есть событие вполне вероятное:

$$P_{10}^{1} = C_{10}^{1} \cdot (0{,}3)^{1} \cdot (0{,}7)^{9} = 10 \cdot 0{,}3 \cdot (0{,}7)^{9} \approx 0{,}12$$

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятия 30-32. Задачи математической статистики. статистические совокупности

План

1. *Дискретные случайные величины*
2. *Математическая статистика, основные понятия.*
3. *Статистические совокупности*

Дискретные случайные величины.

Часто результатом случайного эксперимента является число. Например, можно подбросить игральную кость и получить одно из чисел: 1,2,3,4,5,6. Можно подъехать к бензоколонке и обнаружить определённое число автомашин в очереди. Можно выстрелить из пушки и измерить расстояние от места выстрела до места падения снаряда. В таких случаях будем говорить, что имеем дело со случайной величиной.

Каждому исходу случайного эксперимента поставим в соответствие единственное число x_k — значение случайной величины. Тогда **естественно рассматривать случайную величину как функцию, заданную на множестве исходов случайного эксперимента.**

Случайная величина, которая может принимать лишь конечное или счётное число значений, называется **дискретной**.

Случайные величины будем обозначать буквами греческого алфавита: ξ (кси), η (эта), … Значения случайной величины будем записывать в виде конечной или бесконечной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$

Математическая статистика.

Основной задачей математической статистики является разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах из данных наблюдений и экспериментов. Эти выводы и заключения относятся не к отдельным испытаниям, из повторения которых складывается данное массовое явление, а представляют собой утверждения об общих вероятностных характеристиках данного процесса, то есть о вероятностях, законах распределения, математических ожиданиях, дисперсиях и т. д. Такое использование фактических данных как раз и является отличительной чертой статистического метода.

Пусть мы располагаем сведениями (обычно довольно ограниченными), например, о числе дефектных изделий в изготовленной в определенных условиях продукции или о результатах испытаний материалов на разрушение и т. п. Собранные нами данные могут представлять непосредственный интерес в смысле информации о качестве той или иной партии продукции. Статистические же проблемы возникают тогда, когда мы на основе той же информации начинаем делать выводы относительно более широкого круга явлений. Так например нас может интересовать качество технологического процесса, для чего мы оцениваем вероятность получения в нем дефектного изделия или среднюю долговечность изделия. В этом случае мы рассматриваем собранный материал не ради его самого, а лишь как некую пробную группу или выборку, представляющую только серии из возможных результатов, которые мы могли бы встретить при продолжении наблюдений массового процесса в данной обстановке. Выводы и оценки, основанные на материале наблюдений, отражают случайный состав пробной группы и поэтому считаются приблизительными оценками вероятностного характера. Во многих случаях теория указывает, как наилучшим способом использовать имеющуюся информацию для получения по возможности более точных и надежных характеристик, указывая при этом степень надежности выводов, объясняющуюся ограниченностью запаса сведений.

В математической статистике рассматриваются две основные категории задач: оценивание и статистическая проверка гипотез. Первая задача разделяется на точечное оценивание и интервальное оценивание параметров распределения. Например может возникнуть необходимость по наблюдениям получить точечные оценки параметров $M\xi$ и $D\xi$. Если мы хотим получить некоторый интервал, с той или иной степенью достоверности содержащий истинное значение параметра, то это задача интервального оценивания.

Вторая задача – проверка гипотез – заключается в том, что мы делаем предположение о распределении вероятностей случайной величины (например, о значении одного или нескольких параметров функции распределения) и решаем, согласуются ли в некотором смысле эти значения параметров с полученными результатами наблюдений.

Выборочный метод.

Пусть нам нужно обследовать количественный признак в партии экземпляров некоторого товара. Проверку партии можно проводить двумя способами:

1) провести сплошной контроль всей партии;

2) провести контроль только части партии.

Первый способ не всегда осуществим, например, из–за большого числа экземпляров в партии, из–за дороговизны проведения операции контроля, из–за того, что контроль связан с разрушением экземпляра (проверка электролампы на долговечность ее работы).

При втором способе множество случайным образом отобранных объектов называется **выборочной совокупностью** или **выборкой**. Все множество объектов, из которого производится выборка, называется **генеральной совокупностью**. Число объектов в выборке называется **объемом выборки**. Обычно будем считать, что объем генеральной совокупности бесконечен.

Выборки разделяются на **повторные** (с возвращением) и **бесповторные** (без возвращения).

Обычно осуществляются бесповторные выборки, но благодаря большому (бесконечному) объему генеральной совокупности ведутся расчеты и делаются выводы, справедливые лишь для повторных выборок.

Выборка должна достаточно полно отражать особенности всех объектов генеральной совокупности, иначе говоря, выборка должна быть **репрезентативной** (представительной).

Вариационный ряд.

Пусть для объектов генеральной совокупности определен некоторый признак или числовая характеристика, которую можно замерить (размер детали, удельное количество нитратов в дыне, шум работы двигателя). Эта характеристика – случайная величина ξ, принимающая на каждом объекте определенное числовое значение. Из выборки объема n получаем значения этой случайной величины в виде ряда из n чисел:

$$x_1, x_2,..., x_n. \qquad (*)$$

Эти числа называются значениями признака.

Среди чисел ряда (*) могут быть одинаковые числа. Если значения признака упорядочить, то есть расположить в порядке возрастания или убывания, написав каждое значение лишь один раз, а затем под каждым значением x_i признака написать число m_i, показывающее сколько раз данное значение встречается в ряду (*):

1	2	3	..	k
1	2	3	..	k

то получится таблица, называемая **дискретным вариационным рядом**. Число m_i называется частотой i-го значения признака.

Очевидно, что x_i в ряду (*) может не совпадать с x_i в вариационном ряду. Очевидна также справедливость равенства

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n.$$

Если промежуток между наименьшим и наибольшим значениями признака в выборке разбить на несколько интервалов одинаковой длины, каждому интервалу поставить в соответствие число выборочных значений признака, попавших в этот интервал, то получим **интервальный вариационный ряд**. Если признак может принимать любые значения из некоторого промежутка, то есть является непрерывной случайной величиной, приходится выборку представлять именно таким рядом. Если в вариационном интервальном ряду каждый интервал $[\alpha_i; \alpha_{i+1})$ заменить лежащим в его середине числом $(\alpha_i+\alpha_{i+1})/2$, то получим дискретный вариационный ряд. Такая замена вполне естественна, так как, например, при измерении размера детали с точностью до одного миллиметра всем размерам из промежутка [49,5; 50,5), будет соответствовать одно число, равное 50.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятия 33-35. Частота. Относительная частота

План

1. *Частота. Относительная частота*
2. *Среднее арифметическое*
3. *Дисперсия*
4.

Частота это число, которое показывает сколько раз в выборке встречается тот или иной элемент.

Предположим, что в колледже проходят соревнования по подтягиваниям. В соревнованиях участвует 36 студентов. Составим таблицу в которую будем заносить число подтягиваний, а также число участников, которые выполнили столько подтягиваний.

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Число участников, которые выполнили столько подтягиваний	4	5	10	8	6	3

По таблице можно узнать сколько человек выполнило 5, 10 или 15 подтягиваний. Так, 5 подтягиваний выполнили четыре человека, 10 подтягиваний выполнили восемь человек, 15 подтягиваний выполнили три человека.

Количество человек, повторяющих одно и то же число подтягиваний в данном случае являются *частотой*. Поэтому вторую строку таблицы переименуем в название «частота»:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Частота	4	5	10	8	6	3

Такие таблицы называют **таблицами частот.**

Частота обладает следующим свойством: *сумма частот равна общему числу данных в выборке.*

Это означает, что сумма частот равна общему числу студентов, участвующих в соревнованиях, то есть тридцати шести. Проверим, так ли это. Сложим частоты, приведенные в таблице:

$$4 + 5 + 10 + 8 + 6 + 3 = 36$$

ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ЧАСТОТА

Относительная частота это в принципе та же самая частота, которая была рассмотрена ранее, но только выраженная в процентах.

Частота варианты это отношение кратности варианты, к объему выборки.

$$\text{частота варианты} = \frac{\text{кратность варианты}}{\text{объем выборки}}$$

Вернемся к нашей таблице:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Частота	4	5	10	8	6	3

Пять подтягиваний выполнили 4 человека из 36. Шесть подтягиваний выполнили 5 человек из 36. Восемь подтягиваний выполнили 10 человек из 36 и так далее. Давайте заполним таблицу с помощью таких отношений:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Относительная частота	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{3}{36}$

Выполним деление в этих дробях:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Относительная частота	0,11	0,14	0,28	0,22	0,17	0,08

Выразим эти частоты в процентах. Для этого умножим их на 100. Умножение на 100 удобно выполнить передвижением запятой на две цифры вправо:

Число подтягиваний	5	6	8	10	12	15
Относительная частота	11%	14%	28%	22%	17%	8%

Теперь можно сказать, что пять подтягиваний выполнили 11% участников, 6 подтягиваний выполнили 14% участников, 8 подтягиваний выполнили 28% участников и так далее.

При анализе статистических данных используют различные обобщающие показатели, такие как:

- *Среднее арифметическое (математическое ожидание)*
- *Размах*
- *Мода*
- *Медиана*
- *Дисперсия*
- *Среднее квадратичное отклонение.*

СРЕДНЕЕ АРИФМЕТИЧЕСКОЕ

Понятие среднего значения часто используется в повседневной жизни.

Примеры:

- средняя зарплата жителей страны;
- средний балл учащихся;
- средняя скорость движения;
- средняя производительность труда.

Среднее арифметическое — *это результат деления суммы элементов выборки на их количество.*

$$x_{среднее} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_n}{n}$$

Вернемся к нашему примеру с тратами средств в течение недели

Дни недели	Понедельник	Вторник	Среда	Четверг	Пятница	Суббота
Сумма:	150	180	230	250	160	170
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6

Узнаем сколько в среднем мы тратили в каждом из шести дней:

$$x_{среднее} = \frac{150+180+230+250+160+170}{6} = \frac{1140}{6} = 190\ руб.$$

Вернемся к нашему примеру с тарифными разрядами сотрудников библиотеки и определим для указанной выборки среднее арифметическое (математическое ожидание).

X_i	11	12	13	14
n_i	4	4	26	22

Средним арифметическим выборки называется частное от деления суммы вариант на объем выборки.

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + ... + x_n}{n}$$

В нашем примере 56 вариант, рационально ли вычислять среднее арифметическое данным способом?

Среднее арифметическое удобно вычислять, используя **статистическое распределение выборки.**

$$\overline{X} = \frac{x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 + ... + x_k n_k}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$$

Средним арифметическим выборки *называется отношение суммы произведения вариант и их частот на объем выборки.*

Если в статистическом распределении выборки указаны варианты и их вероятности, то среднее арифметическое вычисляется по формуле.

$$\overline{X} = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_k p_k$$

Среднее арифметическое значение называется еще **математическим ожиданием M(X).**

$$\overline{X} = \frac{11\cdot 4 + 12\cdot 4 + 13\cdot 26 + 14\cdot 22}{56} = \frac{44 + 48 + 338 + 308}{56} = \frac{738}{56} \approx 13.$$

Характеристику, «отвечающую» за разброс чисел вокруг их среднего значения называют **дисперсией** и обозначают D:

$$D = M(x^2) - (M(x))^2$$

$$M(x^2) = \frac{11^2\cdot 4 + 12^2\cdot 4 + 13^2\cdot 26 + 14^2\cdot 22}{56} = \frac{484 + 576 + 4394 + 4312}{56} = \frac{9766}{56} \approx 174$$

$$D = 174 – 13^2 = 174 – 169 = 5$$

Средним квадратичным отклонением *выборки называется квадратный корень из дисперсии.*

$\sigma = \sqrt{D}$. $\sigma = \sqrt{5} \approx 2{,}2$.

ЛИТЕРАТУРА: [2], [4], [17], [18], [24]

Занятие 36 Графическое представление статистических данных

План

1. *Полигон частот*
2. *Гистограмма*
3. *Диаграмма*
4.

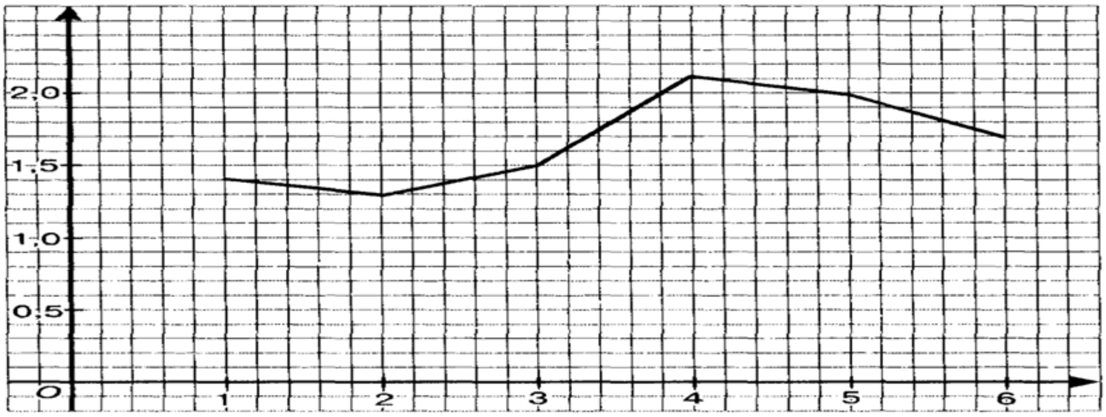
Обработанные результаты статистики можно демонстрировать графически.

Пример. В первом полугодии завод получил прибыль в 10 млн. рублей. Распределение прибыли по месяцам показано в таблице

Месяц	Январь	Февраль	Март	Апрель	Май	Июнь
Прибыль (млн р.)	1,4	1,3	1,5	2,1	2,0	1,7

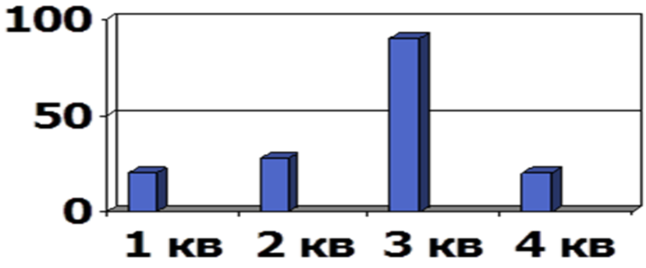
В координатной плоскости на оси абсцисс будем отмечать номер месяца (янв. – 1, февр. – 2 и т.д.). На оси ординат будем отмечать прибыль завода (в млн. руб.). Отметим точки: (1;1,4),(2;1,3),(3;1,5),(4;2,1),(5;2),(6;1,7) и соединим их последовательно отрезками.

Полученную ломаную линию называют ***полигоном частот.***

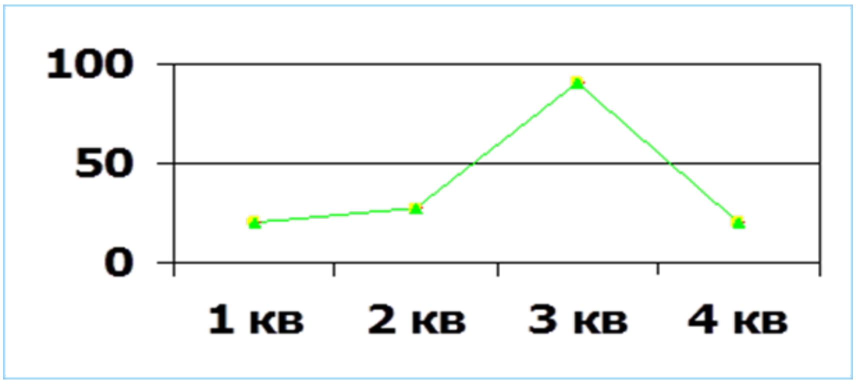


Графики статистического распределения.

Распределение случайных величин можно задавать и демонстрировать графически.



Гистограмма – помогает наглядно сравнивать по величине несколько объектов.



Полигон частот – показывает промежутки убывания и возрастания, точки максимума и минимума.

Круговая диаграмма. Круговые диаграммы используют в тех случаях, когда нужно показать части какого-либо целого.