Упражнения. № 1

1.Выполнить действия над матрицами

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 0 & 4 \\ 7 & 2 & 5 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -7 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$ Найти A·B.

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 7 & -4 \\ 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$ Найти A·B.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ Найти A^3.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$ Вычислить A·B-B·A.

2. Вычислить определители:

2.1. $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$, 2.2. $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ -3 & -4 & -2 \end{vmatrix}$,

2.3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & 5 & -9 \\ 5 & 7 & -1 \end{vmatrix}$, 2.4. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$,

2.5. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$, 2.6. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \\ -3 & 8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

4. Найти M_{11}, M_{23}, A_{13}, A_{21}, A_{12}, A_{23}, A_{31}, A_{32} определителя

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -7 & 3 \\ 4 & 0 & -8 \\ -1 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

УПРАЖНЕНИЯ № 2

1. Найти ранг матрицы:

1.1 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & 5 \\ 3 & -4 & -2 & 8 \\ 5 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$,

1.2 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$,

1.3 $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 4 & 8 & 3 \\ 3 & 6 & 10 & -4 & 7 \end{pmatrix}$,

1.4 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

1.5 $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 1 & 6 \\ -1 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 & 6 \end{pmatrix}$,

1.6 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7 & -2 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & -4 & 1 \\ 4 & 2 & 19 & 1 & 8 \\ 6 & -5 & 11 & -3 & -3 \end{pmatrix}$.

2. Найти обратную матрицу к заданным матрицам:

2.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

2.2 $\begin{pmatrix} 4 & -8 & -5 \\ -4 & 7 & -1 \\ -3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,

2.3 $\begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$,

2.4 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$,

2.5 $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$,

2.6 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Решить матричные уравнения:

3.1 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$,

3.2 $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$,

3.3 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$,

3.4 $X \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

УПРАЖНЕНИЯ № 3

1. Решить системы уравнений методом обратной матрицы и по формулам Крамера:

1.1. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=8 \\ -2x_1+3x_2-3x_3=-5 \\ 3x_1-4x_2+5x_3=10 \end{cases}$

1.2. $\begin{cases} 2x_1+2x_2-x_3=0 \\ 3x_1+4x_2+6=0 \\ 3x_1+x_3=1 \end{cases}$

1.3. $\begin{cases} 2x_1-3x_2-x_3+6=0 \\ 3x_1+4x_2+3x_3+5=0 \\ x_1+x_2+x_3+2=0 \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 3x_1+x_2+6=0 \\ x_1-2x_2-x_3=5 \\ 3x_1+4x_2-2x_3=13 \end{cases}$

1.5. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=11 \\ 4x_1-x_2+4x_3=-10 \\ x_1+3x_2-2x_3=9 \end{cases}$

1.6. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+2x_3=10 \\ x_1-2x_2+x_3=7 \\ 3x_1+2x_2-x_3=1 \end{cases}$

2. Решить системы уравнений методом Гаусса:

2.1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1+3x_2-x_3=4 \\ 3x_1+x_2-4x_3=0 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} x_1+3x_2+2x_3=2 \\ x_1+2x_2-x_3=1 \\ 2x_1+5x_2+x_3=1 \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=1 \\ 3x_1+5x_2-x_3=1 \\ 4x_1+7x_2-2x_3=2 \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} 2x_1-3x_2+x_3=1 \\ 3x_1-x_2+x_3=2 \\ 5x_1-4x_2+2x_3=3 \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=6 \\ 2x_1-3x_2+x_3=0 \\ 3x_1-2x_2+4x_3=5 \\ x_1-x_2+3x_3=3 \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} 4x_1+2x_2-2x_3+2x_4=12 \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=0 \\ 5x_1+2x_2+x_3-2x_4=12 \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=-2 \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} 3x_1-2x_2+3x_3-x_4=0 \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4=0 \\ x_1-x_2+2x_3+5x_4=0 \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3+x_4=1 \\ x_2-x_3+2x_4=2 \\ 2x_1+2x_2+3x_4=0 \end{cases}$

3. Найти базисные решения системы уравнений:

3.1. $\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=5 \\ 2x_1-x_2-3x_3=-4 \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} 3x_1+x_2-x_3-2x_4=-4 \\ x_1+x_2-x_3+2x_4=1 \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=2 \\ 2x_1+2x_2-x_3+2x_4=-2 \\ x_1-x_2-x_4=2 \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} 3x_1-x_2+2x_3+2x_4=18 \\ -x_1-x_2+2x_4=0 \\ x_1+x_2+x_3-2x_4=1 \end{cases}$

4. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородных систем:

4.1. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 + 5x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 6x_4 + 10x_5 = 0 \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 12x_4 = 0 \end{cases}$

УПРАЖНЕНИЯ № 4

1. Даны точки А (3,-4,7), В (5,-6,8). Найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BE}$, если т. Е – середина отрезка АВ.

2. Даны четыре точки А(5,6,-8), В(8,10,-3), С(1,-2,4), D (7,6,14). Коллинеарны ли векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$?

3. Даны векторы $\vec{a}=(2,-1,-2)$, $\vec{в}=(8,-4,0)$. Найти:

а) векторы $\vec{c}=2\vec{a}$ и $\vec{d}=\vec{в}-\vec{a}$;

б) длины векторов $\vec{c}$ и $\vec{d}$;

в) скалярный квадрат вектора $\vec{d}$;

г) скалярное произведение векторов $\vec{c}\vec{d}$;

д) угол между векторами $\vec{c}$ и $\vec{d}$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a}=(1,-1,\sqrt{2})$.

5. Проверить, что четыре точки А(3,-1,2), В(1,2,-1), С(-1,1,-3), D(3,-5,3), служат вершинами трапеции и найти длину ее средней линии.

6. Векторы $\overrightarrow{AB}=(2,6,-4)$ и $\overrightarrow{AC}=(4,2,-2)$ совпадают со сторонами треугольника АВС. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами АМ, BN, СР.

7. Даны векторы $\vec{a}=(4,-2,-4)$, $\vec{в}=(6,-3,2)$. Вычислить:

а) $\vec{a}\,\vec{в}$; б) $\sqrt{\vec{a}^2}$, $\sqrt{\vec{в}^2}$; в) $(2\vec{a}-3\vec{в})(\vec{a}+2\vec{в})$; г) $(\vec{a}+\vec{в})^2$.

8. Даны вершины треугольника А(3,2,-3), В(5,1,-1), и С(1,-2,1). Определить его внутренний угол при вершине А.

9. Даны вершины четырехугольника А(1,-2,2), В(1,4,0), С(-4,1,1)и D(-5,-5,3). Доказать что его диагонали АС и BD взаимно перпендикулярны.

10. Даны три точки А(1,2,0), В(3,0,-3) и С(5,2,6). Вычислить площадь треугольника АВС.

11. Даны вершины треугольника А(1,-1,2), В(5,-6,2) и С(1,3,-1). Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины В на сторону АС.

12. Даны три вектора $\vec{a}=(1,-1,3)$, $\vec{в}=(-2,2,1)$ и $\vec{c}=(3,-2,5)$. Вычислить $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$.

13. Доказать, что четыре точки А(1,2,-1), В(0,1,5), С(-1,2,1), D(2,1,3) лежат в одной плоскости.

14. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках А(2,-1,1), В(5,5,4), С(3,2,-1) и D(4,1,3).

УПРАЖНЕНИЯ № 5

1. Установить, являются ли векторы $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ линейно зависимыми:

1.1. $\overrightarrow{a_1} = (2,-1,3)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,4,-1)$, $\overrightarrow{a_3} = (0,-9,5)$;

1.2. $\overrightarrow{a_1} = (1,2,0)$, $\overrightarrow{a_2} = (3,-1,1)$, $\overrightarrow{a_3} = (0,1,1)$;

1.3. $\overrightarrow{a_1} = (1,1,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{a_3} = (2,1,2)$;

1.4. $\overrightarrow{a_1} = (1,0,1,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,1,1,1)$, $\overrightarrow{a_3} = (-1,0,1,1)$, $\overrightarrow{a_4} = (1,1,1,1)$;

2. Показать, что векторы $\vec{a} = (1,2,0)$, $\vec{в} = (3,-1,1)$, $\vec{c} = (0,1,1)$ заданные в базисе $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ сами образуют базис.

3. Даны векторы $\vec{a} = \overrightarrow{l_1} + \overrightarrow{l_2} + \overrightarrow{l_3}$, $\vec{в} = 2\overrightarrow{l_2} + 3\overrightarrow{l_3}$, $\vec{c} = \overrightarrow{l_2} + 5\overrightarrow{l_3}$, где $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}$ - базис линейного пространства. Доказать, что векторы $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$ образуют базис. Найти координаты вектора $\vec{d} = 2\overrightarrow{l_1} - \overrightarrow{l_2} + \overrightarrow{l_3}$ в базисе $\vec{a}, \vec{в}, \vec{c}$.

4. Векторы $\overrightarrow{l_1}, \overrightarrow{l_2}, \overrightarrow{l_3}, \overrightarrow{l_4}, \overrightarrow{l_5}$ образуют ортопортированный базис. Найти скалярное произведение и длины векторов $\vec{x} = \overrightarrow{l_1} - 2\overrightarrow{l_2} + \overrightarrow{l_5}$, $\vec{y} = 3\overrightarrow{l_2} + \overrightarrow{l_3} - \overrightarrow{l_4} + 2\overrightarrow{l_5}$.

5. Докажите, что система векторов линейно зависима:

а) $\overrightarrow{a_1} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,0,0,0)$;

б) $\overrightarrow{a_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,1,0)$, $\overrightarrow{a_3} = (0,0,1)$, $\overrightarrow{a_4} = (5,6,7)$.

6. Покажите, что следующие системы векторов линейно зависимы, и выясните, является ли вектор $\vec{в}$ линейной комбинацией векторов $\overrightarrow{a_1}$, $\overrightarrow{a_2}$ и $\overrightarrow{a_3}$:

а) $\overrightarrow{a_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,2,1)$, $\overrightarrow{a_3} = (0,1,-1)$, $\overrightarrow{в} = (0,1,0)$;

б) $\overrightarrow{a_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,2,1)$, $\overrightarrow{a_3} = (1,2,1)$, $\vec{в} = (0,0,1)$;

в) $\overrightarrow{a_1} = (0,0,0,1)$, $\overrightarrow{a_2} = (0,0,1,2)$, $\overrightarrow{a_3} = (0,1,3,-5)$, $\overrightarrow{a_4} = (1,-2,0,0)$, $\vec{в} = (1,-1,4,-2)$.

7. Найти координаты вектора $\vec{a} = (1,3,1)$ в базисе $\overrightarrow{l_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{l_2} = (1,1,0)$, $\overrightarrow{l_3} = (1,1,1)$.

УПРАЖНЕНИЯ № 6

1. Найти уравнение множества точек, равноудаленных от оси Оу и точки $F(4,0)$.
2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(2,3)$: а) параллельно оси Ох; б) параллельно оси Оу; в) и составляющей с осью угол 45^0.
3. Составить уравнения прямых, проходящих через точки: а) $A(3,1)$ и $B(5,4)$; б) $A(3,1)$ и $C(3,5)$; в) $A(3,1)$ и $D(-4,1)$.
4. Стороны AB, BC и AC треугольника ABC заданы соответственно уравнениями $4x+3y-5=0$, $x-3y+10=0$, $x-2=0$. Определить координаты его вершин.
5. Составить уравнения прямых, проходящих через точку пересечения прямых $2x-3y+1=0$ и $3x-y-2=0$ параллельно и перпендикулярно прямой $y=x+1$.
6. Найти длину и уравнение высоты BD в треугольнике с вершинами $A(-3,0)$, $B(2,5)$, $C(3,2)$.
7. Найти уравнение прямой, проходящей через точку $A(4,3)$ и отсекающей от координатного угла треугольник площадью 3 кв. ед.
8. Дан треугольник с вершинами $A(-2,0)$, $B(2,4)$ и $C(4,0)$. Найти уравнения сторон треугольника, медианы AE, высоты AD и длину медианы AE.
9. В треугольнике ABC даны уравнения: стороны AB $3x+2y-12=0$, высоты BM $x+2y-4=0$, высоты AM $4x+y-6=0$, где M – точка пересечения высот. Найти уравнения сторон AC, BC и высоты CM.
10. Две стороны параллелограмма заданы уравнениями $y=x-2$ и $x-5y+6=0$. Диагонали его пересекаются в начале координат. Найти уравнения двух сторон параллелограмма и его диагоналей.
11. Найти расстояние между параллельными прямыми $3x+4y-24=0$ и $3x+4y+6=0$.
12. Даны уравнения сторон треугольника $3x-4y+24=0$ (AB), $4x+3y+32=0$ (BC), $2x-y-4=0$ (AC). Составить уравнения высоты и медианы, проведенных из вершины B, и найти их длины.

УПРАЖНЕНИЯ № 7

1. Найти область определения функций:

1) . 2) $y = \log_2 \cos x + \sqrt{9 - x^2}$.

3) $y = \arcsin \dfrac{6x}{x^2 + 9}$. 4) $y = \dfrac{1}{\lg(1 - x)} + \sqrt[3]{x + 2}$.

5) $y = \arccos\left(2x^2 + x\right)$. 6) $y = \sqrt{2x} - \lg(2x + 3)$. $y = \sqrt{x} - \ln(4x - 5)$

2. Найти область значений функций:

1) $y = 2\sin x + \cos x$. 2) $y = \dfrac{4x}{2 + x^2}$.

3) $y = \cos 2x + \sqrt{3} \sin 2x$. 4) $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$.

5) $y = 2\sqrt{1 - x}$. 6) $y = 3\sqrt{1 - x^2}$.

3. Установить четность (нечетность) функций:

1) $y = 3x - ctg^3 2x$. 2) $y = x\dfrac{2^x + 1}{2^x - 1}$.

3) $y = (x - 1)^2 \sin^2 x$. 4) $y = x^3 \sin 2x$.

5) $y = 2x - x^3 + 5x^5$. 6) $y = 3x^2 - \sin x$.

7) $y = \lg \dfrac{1 + x}{1 - x}$. 8) $y = \cos^2 \dfrac{x}{2} - 2\sin \dfrac{x}{2}$.

4. Построить графики функций:

1) $y = -2(x + 3)^2 + 1$. 2) $y = \dfrac{3}{x - 1} - 2$.

3) $y = \dfrac{4x - 3}{x - 1}$. 4) $y = \log_2 (3 - 2x)^2$.

5) $y = \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$. 6) $y = \sin x + \cos x$.

7) $y = \sin^2 x + 1$. 8) $y = 3\sin(2x + 8)$.

УПРАЖНЕНИЯ № 8

1.Доказать, используя определение предела, что:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{n+2}=3$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n+1}{n}=5$.

3) $\lim\limits_{x\to 5}\left(3x-4\right)=11$.

4) $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2-3\right)=1$.

2. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x+3x^2}{3x-2-4x^2}$;

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+4x^2+1}{3x^5-x^3+3}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^{11}-11x^5-5}{5-x-6x^{10}}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3+x+5x^4}{1-12x-3x^4}$;

5) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{6-x}-\sqrt{2+x}}{x^2-x-2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-x-12}{\sqrt{3x+16}-5}$;

7) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{x+6}}{x^2-x-6}$;

8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg^2 5x}{\sin^2 3x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin\left(x-2\right)}{x^2-x-2}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{5x\cdot\sin 3x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{arctg\dfrac{2}{x}}{\dfrac{5}{x}}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x-2}\right)^x$;

15) $\lim\limits_{x\to 1}\left(5-4x\right)^{\frac{2x}{x-1}}$;

16) $\lim\limits_{x\to 1}\left(2x-1\right)^{\frac{3}{4x-4}}$;

1) $f\left(x\right)=9^{\frac{1}{2-x}}$;

2) $f\left(x\right)=11^{\frac{1}{4+x}}$;

3) $f\left(x\right)=\dfrac{x^2+3}{x-5}$;

4) $f\left(x\right)=\dfrac{2}{3+5^{\frac{1}{x-2}}}$.

4. Какие из данных функций являются непрерывными в точке $x=1$? В случае непрерывности установить характер точки разрыва:

1) $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$;

2) $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1},\ \text{если } x\neq 1,\\ 2,\ \text{если } x=1;\end{cases}$

3) $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$;

4) $y=\dfrac{1}{x-1}$.

УПРАЖНЕНИЯ № 9

1. Исходя из определения производной, найти производные следующих функций:

1) $y=a^x$,

2) $y=\log_a x$,

3) $y=\cos x$,

4) $y=x^2$.

2. Найти первые производные данных функций:

1) $y=\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{x}+\dfrac{x}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2-2}$;

2) $y=\ln\cos x+\dfrac{1}{2}tg^2 x$;

3) $y=\sqrt[3]{x^4+5x}-\sqrt[4]{(5x-1)^3}$;

4) $y=\sin^3 2x-e^{1+\ln^2 x}$;

5) $y=3^{\cos^2 2x}+tg\ln\sqrt{x}$;

6) $y=ctg\sqrt{1+x^2}+\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$;

7) $y=\sqrt{2x}\arcsin\dfrac{2x+1}{3}$;

8) $y=e^{-x^2}\cdot\cos^3(2x+3)$;

9) $y=4^{\cos 2x}-\sqrt[4]{3ctgx}$;

10) $y=\ln\left(\sqrt{1+e^x}-1\right)-\ln\left(\sqrt{1+e^x}+1\right)$;

11) $y=\left(\dfrac{2}{\cos^4 x}+\dfrac{3}{\cos^2 x}\right)\sin x$;

12) $y=\dfrac{arctgx}{\sqrt{1+x^2}}$.

3. Найти производные, используя метод логарифмического дифференцирования:

1) $y=(\arcsin x)^{2x}$;

2) $y=(x-5)^{\sin 3x}$;

3) $y=(x^3+1)^{ctg 2x}$;

4) $y=(\sin)^{\cos x}$;

5) $y=(\ln 3x)^{\frac{2}{3}x}$;

6) $y=x^{\sin^2 3x}$.

4. Найти производные функций, заданных неявно:

1) $\cos y=x-y$;

2) $x-y=e^{x+y}$;

3) $y^2=x\sin y$;

4) $e^{x-y}-x^2+y^2=0$;

5) $\cos xy=\dfrac{y}{x}$;

6) $xe^y+ye^x=xy$;

7) $x^2+xy+y^2=6$;

8) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

5. Составить уравнения касательной к кривой:

1) $y=\dfrac{2}{9+x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=2$; 2) $y=\dfrac{x^2}{4}-x$

а) в точках ее пересечения с прямой $3x+2y-4=0$;

б) параллельной и перпендикулярной прямой $3x+2y-4=0$.

УПРАЖНЕНИЯ № 10

Вычислить пределы, используя правило Лопиталя:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x^2+4x}{x^3+x-3}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\left(x^2-3\right)}{x^3+3x-10}$;

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\ln x}$;

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+e^{-x^2}-2}{x^2}$;

6) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$;

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x\ln x-\sqrt{x+x^2}\right)$;

8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-tgx}{\cos 2x}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^5}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{\ln^2 x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\sin 2x\right)^x$

12) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\sin x\right)^{thx}$.

УПРАЖНЕНИЯ № 11

1. Найти интервалы монотонности функций:

1) $y=(x+2)^5(2x+1)^4$,

2) $y=x-e^x$,

3) $y=x^2e^{-x}$,

4) $y=x^3-3x^2-9x+14$,

5) $y=x^4-2x^2$,

6) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

2. Найти экстремумы функций:

1) $y=2x^3-3x^2$;

2) $y=2x^3-6x^2-18x+7$;

3) $y=x\ln^2 x$;

4) $y=\sqrt{\ln^2 x-1}$;

5) $y=\ln(2+\cos x)$;

6) $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}$;

7) $y=xe^{-2x}$;

8) $y=\sqrt{2+x-x^2}$;

9) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$;

10) $y=x-\ln(1+x^2)$.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения данных функций на заданных отрезках:

1) $y=\dfrac{x^2-2x+16}{x-1}, x\in[2;5]$;

2) $y=2x-\sqrt{x}, x\in[0;4]$;

3) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}, x\in[-5;-1]$;

4) $y=(5-x)2^{-x}, x\in[-1;0]$;

5) $y=3x^2-6x, x\in[0;3]$;

6) $y=\sqrt{100-x^2}, x\in[-6;8]$;

7) $y=\dfrac{x-1}{x+1}, x\in[0;4]$;

8) $y=x^3-3x^2+6x-2, x\in[-1;1]$;

9) $y=\sin 2x-x, x\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$;

10) $y=\sqrt[3]{(x^2-2x)^2}, x\in[0;3]$.

УПРАЖНЕНИЯ № 12

1. Найти интервалы выпуклости и точки перегиба следующих функций:

1. $y=2x^3-3x^2+15$.
2. $y=2x^2+\ln x$.
3. $y=x^3-6x^2$.
4. $y=xe^x$.
5. $y=e^{-x^2}$.
6. $y=x^3-3x^2+2$.
7. $y=x^2(2-x)^2$.
8. $y=\dfrac{x}{x+1}$.

2. Найти асимптоты кривых:

1. $y=\dfrac{2}{x+5}$.
2. $y=\dfrac{x^2+8x-6}{x}$.
3. $y=\dfrac{x^2}{x+4}$.
4. $y=\dfrac{1}{x^2-4x+5}$.
5. $y=xe^x$.
6. $y=\dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.
7. $y=\dfrac{3x^5}{2+x^4}$.
8. $y=\dfrac{2x^3\ln x}{x^2+1}$.

3. Исследовать функции и построить их графики:

1. $y=x^2+x$.
2. $y=3x-x^3$.
3. $y=x^2(2-x)^2$.
4. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.
5. $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$.
6. $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^2}$.
7. $y=x+\dfrac{27}{x^3}$.
8. $y=(2+x)e^{-x}$.
9. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.
10. $y=x\sqrt{1-x}$.
11. $y=xe^{2x-1}$.
12. $y=x-\ln(x+1)$.
13. $y=\ln\dfrac{x}{x-1}$.
14. $y=(x+4)e^{2x}$.
15. $y=\dfrac{e^x}{x}$.
16. $y=\ln(x^2+4x)$.

УПРАЖНЕНИЯ № 13

1.1 $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}dx;$ 1.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+1}};$ 1.3 $\int 2^{3x-1}dx;$ 1.4 $\int \frac{x^2-16}{\sqrt{x}+2}dx$;

1.5 $\int \frac{x^2}{x^2+4}dx$; 1.6 $\int \sqrt[3]{3-x}dx$; 1.7 $\int xe^{-x^2}dx$; 1.8 $\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$;

1.9 $\int x^2 e^{3+5x^3}dx$; 1.10 $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 1.11 $\int \frac{dx}{tgx}$; 1.12 $\int (2+3x) l^{\frac{x}{3}} dx$;

1.13 $\int (x^3+1)\ln x dx$; 1.14 $\int x^2 \sin x dx$; 1.15 $\int e^x \sin x dx$.

УПРАЖНЕНИЯ № 14

Вычислить

2.1 $\int \frac{2x+1}{x^2+2x+1}dx$; 2.2 $\int \frac{x+1}{4x^2+4x-3}dx$; 2.3 $\int \frac{8-x}{x^2-4x+13}dx$;

2.4 $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx$; 2.5 $\int \frac{x+1}{x^3-1}dx$. 2.6 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x}}$;

2.7 $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8+4x-4x^2}}$; 2.8 $\int \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}}\,dx$.

УПРАЖНЕНИЯ № 15

Найти интегралы:

3.1 $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$

3.2 $\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$

3.3 $\int \frac{1+tgx}{1-tgx}dx$

3.4 $\int \cos^3 x\,dx$

3.5 $\int \sin^3 \frac{x}{2}\cos^5 \frac{x}{2}dx$

3.6 $\int \sin^2 x\cos^4 x\,dx$

3.7 $\int \sin 10x\sin 15x\,dx$

3.8 $\int \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{3}\,dx$

3.9 $\int \sin\frac{x}{3}\cos\frac{2x}{3}dx$

3.10 $\int x^2\cos 3x\,dx$

3.11 $\int e^x\sin\frac{x}{2}\,dx$

3.12 $\int x^2\ln\frac{x}{3}\,dx$

УПРАЖНЕНИЯ № 16

Вычислить определенные интегралы.

5.1 $\int_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{y}}{y^2} dy$; 5.2 $\int_{-3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$; 5.3 $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

5.4 $\int_{0}^{\pi/2} \sin^2 x \cos x dx$; 5.5 $\int_{\ln 2}^{\ln 8} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; 5.6 $\int_{0}^{1} \ln(1+x) dx$;

5.7 $\int_{0}^{\ln 5} xe^{-x} dx$; 5.8 $\int_{0}^{\pi} x\sin x dx$; 5.9 $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{x^2+3x+2}$.

Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций :

5.10 $y=\sqrt{x}$, $y=2-x$, $y=0$; 5.11 $y=1/x$, $y=x$, $x=2$;

5.12 $y=x^2-2x+3$, $y=3x-1$; 5.13 $y=x^2$, $y=1+(3/4)x^2$;

5.14 $y=-x^2$, $y=2e^x$, $x=0$, $x=1$; 5.15 $y=\ln x$, $x=e$, $y=0$.

Найти объемы тел, образованных вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями

5.16 $y=4-x^2$, $y=0$, $x=0$, где $x\geq 0$;

5.17 $y=e^x$, $x=0$, $x=1$, $y=0$;

5.18 $y=x^2+1$, $y=0$, $x=1$, $x=2$;

5.19 $y=x^3$, $y=1$, $x=0$;

5.20 $x=y^2-2$, $y=x$.

УПРАЖНЕНИЯ. № 17

Вычислить, или установить расходимость несобственных интегралов:

6.1. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$,

6.2. $\int_1^{1/2} \frac{dx}{x\ln^2 x}$,

6.3. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3}$,

6.4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$,

6.5. $\int_0^3 \frac{dx}{(x-1)^2}$,

6.6. $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$.

УПРАЖНЕНИЯ № 18

1. Найти частные производные второго порядка функций:

   а) $z = x^3y^2 - 2xy^3$; б) $z = \ln(x^2 + 2y^3)$;

2. Найти полные дифференциалы функций:

   а) $z = (1 + x^2)^y$; б) $z = (x - \frac{1}{y})e^{-x^2y}$;

   в) $z = \ln\frac{x + \sqrt{y^2 + 1}}{y + \sqrt{x^2 + 1}}$; в) $z = (\ln y)^x$.

УПРАЖНЕНИЯ № 19

1. Найти градиент $\overrightarrow{\nabla z}$ заданной функции в точке M_0. Вычислить его величину и направление.

а) $z = x^2 + y^2$; $M_0(3; 2)$. б) $z = \sqrt{4 + x^2 + y^2}$; $M_0(2; 1)$. в) $z = arctg\dfrac{y}{x}$; $M_0(1; 1)$.

2. Даны функции $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $z = x - 3y + \sqrt{3xy}$. Найти угол между градиентами этих функций в точке $M_0(3; 4)$.

3. Найти производную функции $z = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + 1$ в точке $M_0(3; 1)$ в направлении, идущем от этой точки к точке $M_1(6; 5)$.

4. Найти скорость изменения функции $z = arctg(xy)$ в точке $M(1; 1)$ в направлении биссектрисы первого координатного угла.

УПРАЖНЕНИЯ № 20

1. Решить дифференциальные уравнения:

1.1. $xy' - y = y^3$, Отв. $x = \dfrac{Cy}{\sqrt{1+y^2}}$.

1.2. $y - xy' = \left(1 + x^2 y'\right)$, Отв. $y = 1 + \dfrac{Cx}{1+x^2}$.

1.3. $xyy' = 1 - x^2$, Отв. $x^2 + y^2 = \ln\left(Cx^2\right)$.

1.4. $xydx + \left(x+1\right)dy = 0$, Отв. $y = C\left(x+1\right)e^{-x}$.

1.5. $\sqrt{y^2+1}dx = xydy$, Отв. $\ln\left|x\right| = C + \sqrt{y^2+1}, x = 0$.

1.6. $2x^2yy' + y^2 = 2$, Отв. $y^2 - 2 = Ce^{\frac{1}{x}}$.

1.7. $yy' + x = 1$, Отв. $y^2 + x^2 - 2x = C$.

1.8. $y' = 10^{x+y}$, Отв. $y = -\lg\left(C - 10^x\right)$.

2. Решить уравнения, сводящиеся к уравнениям с разделяющимися переменными

2.1. $y' - y = 2x - 3$, Отв. $2x + y - 1 = Ce^x$.

2.2 $\left(2x - y\right)dx + \left(4x - 2y + 3\right)dy = 0$, Отв. $5x + 10y + C = 3\ln\left|10x - 5y + 6\right|$

2.3. $y + xy' = 1 + xy, y\left(1\right) = -1$, Отв. $y = -\dfrac{1}{x}$.

УПРАЖНЕНИЯ № 21

1. Решить уравнения, установив их тип:

1.1. $y'=\frac{y}{x}-1$, Отв. $y=x\ln\frac{C}{x}$.

1.2. $(x-y)ydx-x^2dy=0$, Отв. $x=Ce^{\frac{x}{y}}$.

1.3. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$, Отв. $(x-C)^2-y^2=C^2$.

1.4. $ydx+(2\sqrt{xy}-x)dy=0$, Отв. $\sqrt{\frac{x}{y}}+\ln|y|=C$.

1.5. $ydy+(x-2y)dx=0$, Отв. $x=(y-x)\ln C(y-x)$.

1.6. $y=x\left(y'-\sqrt[x]{e^y}\right)$, Отв. $e^{-\frac{y}{x}}+\ln Cx=0$.

2.Решить уравнения, установив их тип

2.1. $y'-\frac{y}{x}=x$, Отв. $y=Cx+x^2$.

2.2. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^3$, Отв. $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{C}{x^2}$.

2.3. $y^2dx-(2xy+3)dy=0$, Отв. $x=Cy^2-\frac{1}{y}$.

2.4. $y'-y=e^x$, Отв. $y=(x+c)e^x$.

2.5. $x^2+xy'=y, y(1)=0$, Отв. $y=x-x^2$.

УПРАЖНЕНИЯ № 22

1. Решить уравнения, используя понижение порядка

 1.1. $y''' = e^{2x}$, Отв. $y = \frac{1}{8}e^{2x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

 1.2. $x\left(y'' + 1\right) + y' = 0$, Отв. $y = C_1 \ln|x| - \frac{x^2}{4} + C_2$.

 1.3. $\left(xy'' - y'\right)y' = x^3, y\left(1\right) = 1, y'\left(1\right) = 0$, Отв. $225\left(y-1\right)^2 = 8\left(x-1\right)^3\left(3x+2\right)^2$.

 1.4. $2y(y')^3 + y'' = 0, y(0) = 0, y'(0) = -3,$ Отв. $y^3 - y = 3x$.

2. Решить линейные однородные уравнения

 2.1. $y'' - 5y' + 6y = 0$, Отв. $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

 2.2. $y'' + 2y' + y = 0$, Отв. $y = e^{-x}(C_1 + C_2x)$.

 2.3. $y' - y = 3y''$, Отв. $y = e^{\frac{x}{6}}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{11}}{6}x + C_2 \sin\frac{\sqrt{11}}{6}x\right)$.

 2.4. $y'' + 4y' + 3y = 0$, Отв. $y = e^{-2x}\left(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\right)$.

 2.5. $y'' - 2y' + y = 0, y\left(2\right) = 1, y'\left(2\right) = -2$, Отв. $y = \left(7 - 3x\right)e^{x-2}$.

3. Решить линейные уравнения

 3.1. $y'' - 4y' + 4y = x^2$, Отв. $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{2x} + \frac{1}{8}\left(2x^2 + 4x + 3\right)$.

 3.2. $y'' + 2y' + y = e^{2x}$, Отв. $y = \left(C_1 + C_2x\right)e^{-x} + \frac{1}{9}e^{2x}$.

 3.3. $y'' - 8y' + 7y = 14$, Отв. $y = C_1e^x + C_2e^{7x} + 2$.

 3.4. $y'' - 4y = e^x$, Отв. $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x$.

 3.5. $y'' + y = 4e^x, y\left(0\right) = 4, y'\left(0\right) = -3$, Отв. $y = 2\cos x - 5\sin x + 2e^x$.

 3.6. $y'' - 2y' = 2e^x, y\left(1\right) = -1, y'\left(1\right) = 0$, Отв. $y = e^{2x-1} - 2e^x + e - 1$.

 3.7. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}, y\left(0\right) = y'\left(0\right) = 0$, Отв. $y = e^{-x}\left(x - \sin x\right)$.